ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 5—6

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ⋆ 1939

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. Я. ХИНЧИН

О ЛОКАЛЬНОМ РОСТЕ ОДНОРОДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ БЕЗ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

Работа посвящена изучению локального поведения однородных стохастических процессов без последействия. Основным результатом является установление того, что наибольшей локальной изменчивостью обладают процессы, в которых приращения распределены нормально.

§ 1. Постановка задачи

Стохастическим процессом называется однопараметрическая система $x(\lambda)$ случайных величин, где параметр λ может принимать любые вещественные значения. Учение о стохастических процессах за последнее десятилетие выросло в одну из наиболее актуальных глав теории вероятностей. Будучи с математической стороны естественным продолжением классических исследований, связанных с последовательностями случайных величин, оно в то же время оказалось ценным математическим орудием для большого числа приложений.

Стохастический процесс $x(\lambda)$ называется однородным, если закон распределения случайной величины $x(\lambda_0+\lambda)-x(\lambda_0)$ зависит только от λ (но не зависит от λ_0). Далее, мы называем $x(\lambda)$ процессом без последействия, если приращения величины $x(\lambda)$ в двух любых интервалах без общих точек представляют собою взаимно независимые случайные величины. Как показал П. Леви ([1]), любой процесс без последействия может быть представлен в виде

$$x(\lambda)=f(\lambda)+y(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ — функция, не зависящая от случая, а $y(\lambda)$ — однородный процесс без последействия; благодаря этому результату в теории процессов без последействия можно ограничиться изучением однородных процессов.

Пусть $x(\lambda)$ — такой процесс. Очевидно, что мы получим полную вероятностную характеристику его, если зададим для любого $\lambda>0$ закон распределения $\Phi_\lambda(x)$ случайной величины $x(\lambda_0+\lambda)-x(\lambda_0)$; как всякий закон распределения, закон $\Phi_\lambda(x)$ может быть задан своей характеристической функцией *

$$\varphi_\lambda(t)=\int e^{itx}\,d\Phi_\lambda(x),$$

* Здесь и в дальнейшем отсутствующий верхний [нижний] предел интеграции означает $+\infty\,[-\infty]$.

а так как в силу известных свойств характеристических функций

$$\varphi_\lambda(t) = \{\varphi_1(t)\}^\lambda,$$

то всякий однородный процесс без последействия $x(\lambda)$ полностью определяется заданием характеристической функции $\varphi_1(t)$ случайной величины $x(1) - x(0)$; в дальнейшем мы для краткости будем писать $\varphi(t)$ вместо $\varphi_1(t)$ и называть эту функцию характеристической функцией процесса $x(\lambda)$.

Согласно известной теореме П. Леви (1), для того чтобы функция $\varphi(t)$ была характеристической функцией некоторого однородного процесса без последействия, необходимо и достаточно, чтобы логарифм ее мог быть представлен в виде

$$\psi(t) = \lg \varphi(t) = i\gamma t + \int \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u), \tag{1}$$

где γ — вещественная постоянная, определенная однозначно, а $G(u)$ — неубывающая функция, ограниченная на $(-\infty, +\infty)$ и определенная с точностью до аддитивной постоянной, которую мы будем всегда считать выбранной так, что $G(0) = 0$*. Формулу (1) мы будем называть каноническим представлением функции $\varphi(t)$ или закона распределения $\Phi(x) = \Phi_1(x)$.

Настоящая работа посвящена изучению поведения случайной величины $x(\lambda) - x(0)$ при малых значениях λ; при этом мы ради краткости будем говорить о случайной величине $x(\lambda)$, так как без ограничения общности можно положить $x(0) = 0$; само собою разумеется, что в силу предположенной однородности процесса все результаты будут иметь силу и для величины $x(\lambda_0 + \lambda) - x(\lambda_0)$ при любом λ_0.

Простейшим и наиболее изученным однородным процессом без последействия является «нормальный» процесс, в котором $\Phi(x)$ (а следовательно, и $\Phi_\lambda(x)$ при любом λ) есть закон Гаусса. В этом случае функция $G(u)$ канонического представления (1) постоянна при $u > 0$ и при $u < 0$; полагая для простоты

$$\gamma = 0, \quad G(+0) - G(-0) = 1,$$

мы получаем

$$\lg \varphi(t) = -\frac{1}{2} t^2,$$

и следовательно

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Для этого процесса я доказал в 1932 г. (3), что с вероятностью 1

$$\limsup_{\lambda \to 0} \frac{|x(\lambda)|}{\sqrt{2\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}} = 1;$$

---

* Для случая законов с конечными дисперсиями аналогичная формула была ранее получена А. Н. Колмогоровым (2).

в более точном выражении это означает следующее: пусть δ—любое положительное число; тогда с вероятностью 1 можно утверждать, что 1) для всех достаточно малых λ будет

$$\frac{|x(\lambda)|}{\sqrt{2\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}}} < 1+\delta$$

и 2) найдутся сколь угодно малые λ, для которых

$$\frac{|x(\lambda)|}{\sqrt{2\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}}} > 1-\delta.$$

Этот «локальный закон повторного логарифма», очевидно, в весьма точной мере определяет возможный порядок роста случайной функции $x(\lambda)$ в соседстве данной точки*. Далее, в 1938 г. аналогичная проблема была решена мною ([4]) для всех процессов, управляемых устойчивыми законами, отличными от закона Гаусса. Пусть $\Phi(x)$ есть устойчивый закон распределения с характеристическим показателем α $(0 < \alpha < 2)$ и пусть $u(\lambda)$—такая положительная функция от λ, что при $\lambda \to 0$ монотонно

$$u(\lambda) \to 0 \qquad \text{и} \qquad \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} u(\lambda) \to \infty .$$

Тогда, для того чтобы соотношение

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{|x(\lambda)|}{u(\lambda)} = 0 \tag{2}$$

выполнялось с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\{u(\lambda)\}^{\alpha}}$$

имел конечное значение.

Условимся в дальнейшем называть *верхней границей* данного процесса $x(\lambda)$ всякую положительную функцию $u(\lambda)$, для которой предельное соотношение (2) имеет вероятность 1. Повидимому, определение верхних границ для большинства процессов, управляемых неустойчивыми законами, представляет значительные трудности. Не решая этой задачи, я в настоящей работе имею в виду установить некоторые общие для всех процессов рассматриваемого типа закономерности, касающиеся их верхних границ.

Все проведенные до настоящего времени исследования верхних границ различных процессов основывались на том, что оценка вероятности соотношения

$$«|x(\mu)| < u(\mu) \quad \text{для всех} \quad \mu < \lambda»$$

сводилась к оценке вероятности более простого соотношения

$$«|x(\lambda)| < cu(\lambda)»,$$

где c—некоторое постоянное число. В § 2 я доказываю основную

* Еще более точные результаты были получены И. Г. Петровским ([5]).

лемму, дающую для любого процесса рассматриваемого типа схему такой редукции. Оказывается, что если обозначить через $P_c(\lambda)$ вероятность неравенства

$$|x(\lambda)| > cu(\lambda),$$

то конечность (при любом $c > 0$) интеграла

$$\int_0^\sigma P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

(где σ—некоторое положительное число) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $u(\lambda)$ была верхней границей процесса $x(\lambda)$; таким образом отыскание верхних границ любого процесса целиком сводится к возможно точной оценке вероятности $P_c(\lambda)$, т. е. к детальному изучению закона распределения $\Phi_\lambda(x)$ при малых значениях λ и x.

Пользуясь этой редукцией, я в § 3 доказываю, что функция $u(\lambda) = \sqrt{\lambda \lg\lg\frac{1}{\lambda}}$ является верхней границей для всех процессов $x(\lambda)$, не содержащих компоненты, распределенной по закону Гаусса (для краткости я в дальнейшем буду такую компоненту называть просто гауссовской компонентой). Это очевидно означает, что среди всех однородных процессов без последействия нормальный процесс обладает наибольшей локальной колеблемостью; процесс, лишенный гауссовской компоненты, всегда обладает меньшей локальной изменчивостью, чем нормальный процесс; если же данный процесс содержит гауссовскую компоненту, то размах локальных колебаний всего процесса полностью определяется соответствующим размахом этой его компоненты; в частности, локальному закону повторного логарифма подчиняются все те и только те процессы, которые обладают гауссовской компонентой.

В § 4 я, в виде дополнения к предыдущим исследованиям, показываю, что, какова бы ни была положительная функция $\omega(\lambda)$, стремящаяся к нулю при $\lambda \to 0$, существует такой процесс $x(\lambda)$, для которого функция

$$u(\lambda) = \omega(\lambda)\sqrt{\lambda \lg\lg\frac{1}{\lambda}}$$

уже не является верхней границей и который в то же время не содержит гауссовской компоненты. Таким образом найденная для всех процессов без гауссовской компоненты универсальная верхняя граница является наилучшей возможной и не может быть понижена.

§ 2. Основная лемма

ЛЕММА. *Пусть $x(\lambda)$—любой однородный стохастический процесс без последействия; $u(\lambda)$—определенная для $0 < \lambda < \sigma$ положительная неубывающая функция, $\lim\limits_{\lambda\to 0} u(\lambda) = 0$, пусть $x(0) = 0$, c—положительная постоянная и $P_c(\lambda)$—вероятность неравенства*

$$|x(\lambda)| > cu(\lambda);$$

тогда, для того чтобы функция $u(\lambda)$ *была верхней границей процесса* $x(\lambda)$, *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $c > 0$

$$\int_0^{\sigma} P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} < +\infty. \tag{3}$$

Доказательство. Сделаем прежде всего следующее элементарное замечание. Пусть $0 < \alpha < \lambda$; так как

$$x(\lambda) = x(\alpha) + \{x(\lambda) - x(\alpha)\},$$

то из неравенства

$$|x(\lambda)| > a$$

вытекает, что должно иметь место по меньшей мере одно из двух неравенств

$$|x(\alpha)| > \frac{a}{2}$$

или

$$|x(\lambda) - x(\alpha)| > \frac{a}{2}.$$

Но из этого следует, что

$$P\{|x(\lambda)| > a\} \leqslant P\left\{|x(\alpha)| > \frac{a}{2}\right\} + P\left\{|x(\lambda-\alpha)| > \frac{a}{2}\right\}. \tag{4}$$

В частности, при $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ это дает

$$P\{|x(\lambda)| > a\} \leqslant 2P\left\{\left|x\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right| > \frac{a}{2}\right\},$$

а вторичное применение того же неравенства приводит к соотношению

$$P\{|x(\lambda)| > a\} \leqslant 4P\left\{\left|x\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right| > \frac{a}{4}\right\}, \tag{5}$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

А. Доказательство достаточности условия

1. Пусть условие (3) выполнено при любом $c > 0$. Покажем прежде всего, что тогда при любом $c > 0$

$$P\left\{|x(\lambda)| > cu\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

С этой целью заметим, что из неравенства (4) путем его усиления вытекает (полагая $a = cu(\lambda)$)

$$P_c(\lambda) \leqslant P\left\{|x(\alpha)| > \frac{c}{2}u(\alpha)\right\} + P\left\{|x(\lambda-\alpha)| > \frac{c}{2}u(\lambda-\alpha)\right\} = \\ = P_{\frac{c}{2}}(\alpha) + P_{\frac{c}{2}}(\lambda-\alpha);$$

так как это неравенство выполняется для любого $\alpha\,(0 < \alpha < \lambda)$, то мы

можем разделить все его члены на α и интегрировать по α в пределах от $\frac{\lambda}{2}$ до λ, что дает

$$P_c(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lg 2} \int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\lg 2} \int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\lambda-\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lg 2} \left\{ \int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} + \int\limits_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\lambda-\alpha) \frac{d\alpha}{\lambda-\alpha} \right\} = \frac{1}{\lg 2} \int\limits_{0}^{\lambda} P_{\frac{c}{2}}(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha},$$

что в силу условия (3) стремится к нулю при $\lambda \to 0$; таким образом мы находим

$$P_c(\lambda) \to 0 \qquad (\lambda \to 0);$$

но так как из неравенства (5), полагая в нем $a = cu\left(\frac{\lambda}{4}\right)$, находим

$$P\left\{ |x(\lambda)| > cu\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} \leqslant 4P\left\{ \left| x\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right| > \frac{c}{4} u\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} = 4P_{\frac{c}{4}}\left(\frac{\lambda}{4}\right),$$

то из последнего предельного соотношения следует, что

$$P\left\{ |x(\lambda)| > cu\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} \to 0 \tag{6}$$

при $\lambda \to 0$ и любом $c > 0$.

2. Возьмем любую конечную группу чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, подчиненных неравенствам

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = \lambda;$$

пусть a — любое положительное число; обозначим через e_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ событие, состоящее в том, что

$$\left. \begin{aligned} &x(\lambda_i) \leqslant au\left(\frac{\lambda}{4}\right) \quad (1 \leqslant i < k), \\ &x(\lambda_k) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right). \end{aligned} \right\}$$

Тогда очевидно

$$P_{e_k}\left\{ x(\lambda) > \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} \geqslant P_{e_k}\left\{ x(\lambda) - x(\lambda_k) > -\frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} = {}^{*}$$

$$= P\left\{ x(\lambda) - x(\lambda_k) > -\frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant P\left\{ |x(\lambda) - x(\lambda_k)| < \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\}$$

$$= P\left\{ |x(\lambda - \lambda_k)| < \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant P\left\{ |x(\lambda - \lambda_k)| < \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda - \lambda_k}{4}\right) \right\}.$$

---

* Условная вероятность совпадает с безусловной потому, что процесс $x(\lambda)$ — без последействия.

В силу соотношения (6) последняя вероятность стремится к единице при $\lambda \to 0$; поэтому, если λ достаточно мало, мы будем иметь при любом выборе чисел λ_k

$$P_{e_k}\left\{x(\lambda) > \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} > \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{7}$$

Положим

$$X_n(\lambda) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x(\lambda_k)\};$$

тогда, для того чтобы имело место неравенство

$$X_n(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right),$$

очевидно необходимо и достаточно наступление какого-либо из событий e_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$; а так как эти события попарно несовместимы, то

$$P\left\{X_n(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} = \sum_{k=1}^{n} P(e_k);$$

если λ достаточно мало, то отсюда в силу неравенства (7) находим

$$P\left\{X_n(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} P(e_k)\, P_{e_k}\left\{x(\lambda) > \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2P\left\{x(\lambda) > \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\}. \tag{8}$$

Положим теперь

$$X(\lambda) = \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda} \{x(\alpha)\}.$$

Вероятность соотношения

$$X(\lambda) > p$$

мы, как обычно *, определяем как верхнюю грань множества чисел

$$P\{X_n(\lambda) > p\},$$

соответствующих всевозможным системам точек деления $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (причем, разумеется, и число n может принимать всевозможные значения). Так как неравенство (8) имеет место при любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, лишь бы λ было достаточно мало, то для всех достаточно малых λ

$$P\left\{X(\lambda) > au\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\} \leqslant 2P\left\{x(\lambda) > \frac{a}{2} u\left(\frac{\lambda}{4}\right)\right\}. \tag{9}$$

3. Положим теперь для $m \geq 0$

$$w_m = P\left\{\max_{2^{-m-1} \leqslant \lambda \leqslant 2^{-m}} \frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} > \varepsilon\right\},$$

где ε — произвольное положительное число. В силу монотонности функции $u(\lambda)$ мы очевидно имеем

$$w_m \leqslant P\{\max_{2^{-m-1} \leqslant \lambda \leqslant 2^{-m}} x(\lambda) > \varepsilon u(2^{-m-1})\};$$

* См. (3), стр. 86.

пусть θ_m означает любое число, превосходящее 2^{-m}; тогда из последнего неравенства очевидно вытекает

$$w_m \leqslant P\{X(\theta_m) > \varepsilon u(2^{-m-1})\}; \tag{10}$$

если мы теперь выберем θ_m так, чтобы

$$2^{-m} < \theta_m \leqslant 2^{-m+1},$$

то

$$2^{-m-1} > \frac{\theta_m}{4},$$

а потому при достаточно большом m в силу неравенств (10) и (9)

$$w_m \leqslant P\left\{X(\theta_m) > \varepsilon u\left(\frac{\theta_m}{4}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2P\left\{x(\theta_m) > \frac{\varepsilon}{2} u\left(\frac{\theta_m}{4}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2P\left\{|x(\theta_m)| > \frac{\varepsilon}{2} u\left(\frac{\theta_m}{4}\right)\right\},$$

а отсюда в силу неравенства (5)

$$w_m \leqslant 8P\left\{\left|x\left(\frac{\theta_m}{4}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{8} u\left(\frac{\theta_m}{4}\right)\right\} =$$
$$= 8P_{\frac{\varepsilon}{8}}\left(\frac{\theta_m}{4}\right) = 8P_{\frac{\varepsilon}{8}}\left(\frac{2^{-z}}{4}\right),$$

где положено $\theta_m = 2^{-z}$; так как при этом θ_m может быть произвольно выбрано в интервале $(2^{-m}, 2^{-m+1})$, то z может быть произвольно выбрано в интервале $(m-1, m)$; поэтому последнее неравенство мы можем интегрировать по z от $m-1$ до m, что дает

$$w_m \leqslant 8\int_{m-1}^{m} P_{\frac{\varepsilon}{8}}\left(\frac{2^{-z}}{4}\right) dz =$$
$$= 8\int_{2^{-m-2}}^{2^{-m-1}} P_{\frac{\varepsilon}{8}}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda \lg 2}.$$

В силу условия (3) это неравенство показывает, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} w_m$$

сходится; согласно же определению вероятностей w_m отсюда очевидно следует, что сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, с вероятностью как угодно близкой к единице для всех достаточно малых λ будет иметь место неравенство

$$x(\lambda) < \varepsilon u(\lambda).$$

Очевидно, далее, что такое же рассуждение позволяет установить тот же результат для неравенства

$$x(\lambda) > -\varepsilon u(\lambda),$$

а значит и для неравенства

$$|x(\lambda)| < \varepsilon u(\lambda);$$

ввиду произвольной малости ε отсюда, наконец, вытекает *, что с вероятностью 1

$$\frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0,$$

т. е. что функция $u(\lambda)$ является верхней границей процесса $x(\lambda)$, что и требовалось доказать.

B. Доказательство необходимости условия

1. Пусть c — любое положительное число. Положим

$$M(\lambda) = \max_{0<\alpha\leqslant\lambda} \left\{ \frac{|x(\alpha)|}{cu(\alpha)} \right\}.$$

Покажем прежде всего, что из соотношений

$$\left.\begin{aligned} M(2^{-m-1}) &\leqslant 1, \\ \max_{2^{-m-1}\leqslant\lambda\leqslant 2^{-m}} \frac{|x(\lambda) - x(2^{-m-1})|}{2cu(2^{-m})} &> 1, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где m — любое натуральное число, вытекают соотношения

$$\left.\begin{aligned} M(2^{-m-1}) &\leqslant 1, \\ M(2^{-m}) &> 1. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

В самом деле, неравенства (11) показывают, что для некоторого λ, заключенного между 2^{-m-1} и 2^{-m},

$$|x(\lambda)| \geqslant |x(\lambda) - x(2^{-m-1})| - |x(2^{-m-1})| >$$
$$> 2cu(2^{-m}) - cu(2^{-m-1}) \geqslant cu(2^{-m}) \geqslant cu(\lambda),$$

откуда

$$M(2^{-m}) > 1,$$

так что соотношения (12) действительно оказываются выполненными.

* Вот детали этого хорошо известного рассуждения. Если соотношение

$$\frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} \to 0 \quad (\lambda \to 0),$$

которое мы обозначим через A, не имеет места, то при достаточно большом n

$$\max_{\lambda<\lambda_n} \left| \frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} \right| > \frac{1}{n},$$

каково бы ни было $\lambda_n > 0$. Поэтому для любых $\lambda_n > 0$

$$1 - P(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \max_{\lambda<\lambda_n} \left| \frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} \right| > \frac{1}{n} \right\};$$

но при достаточно малом λ_n n-ый член суммы в правой части в силу доказанного как угодно мал; пусть $\varepsilon > 0$ произвольно малое положительное число; выбирая для каждого n число λ_n столь малым, чтобы соответствующий член суммы был меньше, чем ε^n, мы будем иметь

$$1 - P(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

откуда ввиду произвольной малости числа ε

$$P(A) = 1.$$

2. Обозначим через V_m вероятность второго из неравенств (11); так как величины $x(\lambda)-x(2^{-m-1})$ и $x(\lambda-2^{-m-1})$ имеют в силу однородности процесса $x(\lambda)$ один и тот же закон распределения, то

$$V_m = P\{\max_{\lambda \leqslant 2^{-m-1}} |x(\lambda)| > 2cu(2^{-m})\}.$$

Отсюда a fortiori для любого $\lambda \leqslant 2^{-m-1}$

$$V_m \geqslant P\{|x(\lambda)| > 2cu(2^{-m})\},$$

а потому в силу неравенства (5)

$$V_m \geqslant \frac{1}{4} P\{|x(4\lambda)| > 8cu(2^{-m})\};$$

выбирая число λ принадлежащим интервалу $(2^{-m-2}, 2^{-m-1})$, мы имеем $4\lambda \geqslant 2^{-m}$, а потому

$$V_m \geqslant \frac{1}{4} P\{|x(4\lambda)| > 8cu(4\lambda)\} = \frac{1}{4} P_{8c}(4\lambda).$$

Интегрируя это неравенство, после деления обеих его частей на λ, в пределах от 2^{-m-2} до 2^{-m-1}, находим

$$V_m \lg 2 \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_{2^{-m-2}}^{2^{-m-1}} P_{8c}(4\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{4} \int\limits_{2^{-m}}^{2^{-m+1}} P_{8c}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Если, как мы теперь предположим, интеграл

$$\int\limits_0^{\varepsilon} P_{\gamma}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = +\infty$$

при некотором $\gamma > 0$, то последнее неравенство показывает, что при $c < \frac{\gamma}{8}$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} V_m$ должен расходиться.

3. Положим

$$U_m = P\{M(2^{-m}) < 1\} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда вероятность соотношений (11) равна $V_m(1-U_{m+1})$, а вероятность соотношений (12) равна U_m-U_{m+1}; но мы показали, что (12) с необходимостью следует из (11); поэтому

$$V_m(1-U_{m+1}) \leqslant U_m - U_{m+1},$$

откуда

$$1-U_m \leqslant (1-U_{m+1})(1-V_m),$$

и следовательно при любом $k > 0$

$$1-U_m \leqslant (1-U_{m+k+1}) \prod_{i=m}^{m+k} (1-V_i);$$

но последнее произведение в силу доказанной расходимости ряда $\sum V_i$ стремится к нулю при $k \to \infty$, вследствие чего

$$U_m = 1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, как бы велико ни было m, с вероятностью 1

$$\max_{\lambda \leq 2^{-m}} \frac{|x(\lambda)|}{cu(\lambda)} > 1;$$

это показывает, что функция $u(\lambda)$ не является верхней границей процесса $x(\lambda)$, что и требовалось доказать.

Чтобы иллюстрировать простым примером применение доказанной леммы, покажем, что полученные нами ранее ([4]) признаки верхних границ для процессов, управляемых устойчивыми законами, могут быть получены без всяких вычислений в качестве тривиальных следствий этой леммы.

Пусть $x(1)$ подчиняется устойчивому закону $\Phi(x)$ с характеристическим показателем $\alpha < 2$; тогда, как известно, при любом $a > 0$

$$P\{|x(\lambda)| > a\} = P\{|x(1)| > a\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\},$$

и при $a \to \infty$

$$P\{|x(1)| > a\} \sim \frac{\gamma}{a^{\alpha}}, \tag{13}$$

где γ — положительная постоянная.

Пусть теперь функция $u(\lambda)$ сверх обычных наложенных на нее требований подчиняется еще условию

$$\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} u(\lambda) \to \infty \text{ при } \lambda \to 0;$$

тогда

$$\int_0^1 P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^1 P\{|x(1)| > cu(\lambda)\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\}\frac{d\lambda}{\lambda};$$

так как согласно (13) подинтегральная функция при $\lambda \to 0$ эквивалентна

$$\gamma c^{-\alpha}\{u(\lambda)\}^{-\alpha},$$

то написанный интеграл будет конечным или бесконечным одновременно с интегралом

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\{u(\lambda)\}^{\alpha}},$$

конечность которого и является таким образом необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $u(\lambda)$ служила верхней границей для данного процесса.

§ 3. Универсальная верхняя граница для процессов без гауссовской компоненты

ТЕОРЕМА 1. *Функция*

$$u(\lambda) = \sqrt{\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}$$

является верхней границей для любого однородного стохастического процесса без последействия, не содержащего гауссовской компоненты.

Доказательство. 1. Покажем прежде всего, что мы можем ограничиться рассмотрением таких процессов, приращения которых подчиняются симметричным законам распределения. В самом деле, пусть $x(\lambda)$—данный процесс; обозначим через $x_1(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$ две взаимно независимых случайных величины, распределенные по тому же закону, что и $x(\lambda)$; тогда для любого $\beta > 0$

$$P\{|x_1(\lambda)-x_2(\lambda)|>\beta\} \geqslant P\{|x_1(\lambda)|>2\beta, |x_2(\lambda)|<\beta\} =$$
$$= P\{|x_1(\lambda)|>2\beta\} P\{|x_2(\lambda)|<\beta\};$$

полагая в частности $\beta = \frac{1}{2} cu(\lambda)$, где c—любое постоянное положительное число, мы находим отсюда

$$P_c(\lambda) = P\{|x_1(\lambda)| > cu(\lambda)\} \leqslant \frac{P\left\{|x_1(\lambda)-x_2(\lambda)| > \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\}}{P\left\{|x_2(\lambda)| < \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\}}.$$

Мы сейчас докажем, что знаменатель этой дроби при достаточно малом λ превосходит $\frac{1}{2}$; предполагая это установленным, мы находим

$$P_c(\lambda) \leqslant 2P\left\{|x_1(\lambda)-x_2(\lambda)| > \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\},$$

и следовательно *

$$\int_0^\varepsilon P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} \leqslant 2\int_0^\varepsilon P\left\{|x_1(\lambda)-x_2(\lambda)| > \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\}\frac{d\lambda}{\lambda}; \qquad (14)$$

но если величина $x(\lambda)$ подчиняется закону распределения, не имеющему гауссовской компоненты, то величина $x_1(\lambda)-x_2(\lambda)$ очевидно подчинена симметричному закону той же природы; поэтому, если теорема 1 установлена для случая симметричных распределений, то интеграл в правой части (14) должен в силу основной леммы иметь конечное значение, вследствие чего и интеграл в левой части (14) имеет конечное значение; это же в силу основной леммы показывает, что $u(\lambda)$ есть верхняя граница для процесса $x(\lambda)$.

Нам остается показать, что при достаточно малом λ

$$P\left\{|x(\lambda)| < \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\} > \frac{1}{2}. \qquad (15)$$

С этой целью обозначим закон распределения и характеристическую функцию величины $x(\lambda)$ соответственно через $\Phi_\lambda(x)$ и $\varphi_\lambda(t) = \{\varphi(t)\}^\lambda$; будем обозначать через $R(z)$ вещественную часть комплексного числа z

* Здесь и в дальнейшем ε означает любое положительное число, достаточно малое для того, чтобы функция $u(\lambda)$ была возрастающей в интервале $(0, \varepsilon)$.

и через c_1, c_2 — положительные постоянные (могущие зависеть от c); тогда

$$R\{1-\varphi_\lambda(1)\} = \int (1-\cos x)\, d\Phi_\lambda(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\frac{1}{2}cu(\lambda)<|x|<1} (1-\cos x)\, d\Phi_\lambda(x) \geqslant c_1 \int\limits_{\frac{1}{2}cu(\lambda)<|x|<1} x^2\, d\Phi_\lambda(x) \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \left\{\frac{1}{2} cu(\lambda)\right\}^2 \left[P\left\{|x(\lambda)| > \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\} - P\{|x(\lambda)| > 1\} \right],$$

откуда

$$P\left\{|x(\lambda)| > \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\} \leqslant P\{|x(\lambda)| > 1\} + c_2 \frac{1-\{\varphi(1)\}^\lambda}{\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}};$$

так как при $\lambda \to 0$

$$\frac{1-\{\varphi(1)\}^\lambda}{\lambda} \to -\lg \varphi(1)$$

и так как первое слагаемое правой части при $\lambda \to 0$ есть бесконечно малая порядка λ *, то отсюда следует, что при $\lambda \to 0$

$$P\left\{|x(\lambda)| > \frac{1}{2} cu(\lambda)\right\} \to 0;$$

и следовательно при достаточно малом λ выполняется неравенство (15).

2. Предполагая закон распределения величины $x(\lambda)$ симметричным, а значит, характеристическую функцию его вещественной, мы в качестве канонического представления функции $\varphi(t)$ будем согласно (1) иметь формулу

$$\psi(t) = \lg \varphi(t) = \int (\cos tu - 1) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u);$$

при этом вследствие предположенного отсутствия гауссовской компоненты

$$G(+0) = G(-0) = 0.$$

Положим для краткости во всем дальнейшем

$$\mu = \mu(\lambda) = \frac{1}{2} c \sqrt{\lg\lg \frac{1}{\lambda}},$$

так что

$$cu(\lambda) = 2\mu\sqrt{\lambda}.$$

Рассмотрим функции

$$\psi_1(t) = \lg \varphi_1(t) = \int\limits_{|u| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\cos tu - 1) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)$$

и

$$\psi_2(t) = \lg \varphi_2(t) = \int\limits_{|u| > \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\cos tu - 1) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)$$

$$\psi_1(t) + \psi_2(t) = \psi(t); \quad \varphi_1(t)\, \varphi_2(t) = \varphi(t);$$

* См., например, ([6]), стр. 33–34, теорема 31.

очевидно, что $\{\varphi_1(t)\}^\lambda$ и $\{\varphi_2(t)\}^\lambda$ представляют собою характеристические функции некоторых законов распределения, которые мы обозначим соответственно $\Phi_{\lambda 1}(x)$ и $\Phi_{\lambda 2}(x)$; если x_1 и x_2 — две взаимно независимые случайные величины, подчиненные соответственно этим двум законам, то в силу соотношения

$$\{\varphi_1(t)\}^\lambda \{\varphi_2(t)\}^\lambda = \{\varphi(t)\}^\lambda$$

величина $x_1 + x_2$ распределена по закону $\Phi_\lambda(x)$, которому подчиняется величина $x(\lambda)$, а так как из $|x_1 + x_2| > a$ с необходимостью следует, что либо $|x_1| > \frac{a}{2}$ либо $|x_2| > \frac{a}{2}$, то

$$P_c(\lambda) = P\{|x(\lambda)| > 2\mu\sqrt{\lambda}\} = P\{|x_1 + x_2| > 2\mu\sqrt{\lambda}\} \leqslant$$
$$\leqslant P\{|x_1| > \mu\sqrt{\lambda}\} + P\{|x_2| > \mu\sqrt{\lambda}\}. \tag{16}$$

Положим

$$P\{|x_1| > \mu\sqrt{\lambda}\} = A_c(\lambda), \quad P\{|x_2| > \mu\sqrt{\lambda}\} = B_c(\lambda).$$

В дальнейшем будет показано, что интегралы

$$\int\limits_0^\sigma A_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\sigma B_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

конечны; в силу неравенства (16) отсюда вытекает конечность интеграла

$$\int\limits_0^\sigma P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda};$$

в силу же основной леммы это означает, что функция $u(\lambda)$ является верхней границей для процесса $x(\lambda)$, чем и завершается доказательство теоремы 1.

3. Для оценки вероятности $A_c(\lambda)$ положим

$$a = \Gamma\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}},$$

где Γ — положительная постоянная, которую мы выберем позднее, и оценим математическое ожидание величины e^{ax_1}:

$$E\, e^{ax_1} = \int e^{ax}\, d\Phi_{\lambda 1}(x) = \{\varphi_1(ai)\}^\lambda = e^{\lambda\psi_1(ai)}, \tag{17}$$

где

$$\psi_1(ai) = \int\limits_{|u| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\operatorname{ch} au - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u);$$

но при $|u| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}$ мы имеем

$$\operatorname{ch} au - 1 \leqslant \gamma a^2 u^2,$$

где положительная постоянная γ зависит только от Γ; таким образом

$$\psi_1(ai) \leqslant 2\gamma a^2\left\{G\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)\right\};$$

полагая для краткости

$$G\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)-G\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)=g(\lambda),$$

мы получаем поэтому из (17)

$$Ee^{ax_1}\leqslant e^{2\gamma\Gamma^2\mu^2 g(\lambda)};$$

применяя же неравенство Чебышева, находим

$$A_c(\lambda)=P\{|x_1|>\mu\sqrt{\lambda}\}\leqslant\frac{2Ee^{ax_1}}{e^{a\mu\sqrt{\lambda}}}\leqslant 2e^{\mu^2\{2\gamma\Gamma^2 g(\lambda)-\Gamma\}}.$$

Но в силу предположенного отсутствия гауссовской компоненты мы имеем

$$g(\lambda)\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda\longrightarrow 0,$$

вследствие чего для достаточно малых λ

$$A_c(\lambda)\leqslant 2e^{-\frac{\Gamma}{2}\mu^2}=2e^{-\frac{\Gamma c^2}{8}\lg\lg\frac{1}{\lambda}};$$

выбирая теперь постоянную Γ так, чтобы

$$\frac{\Gamma c^2}{8}>2,$$

мы будем иметь для достаточно малых λ

$$A_c(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lg^2\frac{1}{\lambda}},$$

вследствие чего интеграл

$$\int_0^c A_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

имеет конечное значение.

4. Для оценки вероятности $B_c(\lambda)$ заметим, что

$$\begin{aligned}B_c(\lambda)&=P\{|x_2|>\mu\sqrt{\lambda}\}=2P\{x_2>\mu\sqrt{\lambda}\}=\\&=2\{1-\Phi_{\lambda 2}(\mu\sqrt{\lambda})\}\leqslant\\&\leqslant\frac{2}{\mu\sqrt{\lambda}}\int_0^{\mu\sqrt{\lambda}}\{1-\Phi_{\lambda 2}(x)\}\,dx;\end{aligned}$$

а так как

$$\Phi_{\lambda 2}(0)=\frac{1}{2}$$

и

$$\Phi_{\lambda 2}(x)-\Phi_{\lambda 2}(0)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\sin xt}{t}e^{\lambda\psi_2(t)}dt,$$

то

$$\begin{aligned}B_c(\lambda)&\leqslant\frac{1}{\pi\mu\sqrt{\lambda}}\int\frac{1-e^{\lambda\psi_2(t)}}{t}\,dt\int_0^{\mu\sqrt{\lambda}}\sin xt\,dx=\\&=\frac{1}{\pi\mu\sqrt{\lambda}}\int\frac{1-\cos t\mu\sqrt{\lambda}}{t^2}\{1-e^{\lambda\psi_2(t)}\}\,dt.\end{aligned}$$

Но

$$1-e^{\lambda\psi_2(t)}<-\lambda\psi_2(t),$$

так что мы получаем далее

$$B_c(\lambda) \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\mu} \int \frac{1-\cos t\mu\sqrt{\lambda}}{t^2} [-\psi_2(t)]\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\mu} \int\limits_{|u| > \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \int \frac{(1-\cos t\mu\sqrt{\lambda})(1-\cos tu)}{t^2} dt.$$

В силу известной формулы

$$\int \frac{(1-\cos at)(1-\cos bt)}{t^2} dt = \pi \min(|a|, |b|),$$

это дает

$$B_c(\lambda) \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \int\limits_{|u| > \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \min(|u|, \mu\sqrt{\lambda}) =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \int\limits_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} < |u| \leqslant \mu\sqrt{\lambda}} \frac{1+u^2}{|u|} dG(u) + \lambda \int\limits_{|u| > \mu\sqrt{\lambda}} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u).$$

Нашей целью является доказательство того, что интеграл

$$\int\limits_0^c B_c(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

имеет конечное значение. Как показывает последнее неравенство, цель эта будет достигнута, если мы покажем, что конечное значение имеет каждый из двух интегралов

$$I_1 = \int\limits_0^c \frac{d\lambda}{\mu\sqrt{\lambda}} \int\limits_{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} < |u| \leqslant \mu\sqrt{\lambda}} \frac{1+u^2}{|u|} dG(u)$$

и

$$I_2 = \int\limits_0^c d\lambda \int\limits_{|u| > \mu\sqrt{\lambda}} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u).$$

Для оценки интеграла I_1 мы произведем замену переменной, полагая

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} = \alpha;$$

это дает

$$d\alpha = \frac{d\lambda}{2\mu\sqrt{\lambda}} - \frac{\sqrt{\lambda}\, d\mu}{\mu^2} \geqslant \frac{d\lambda}{2\mu\sqrt{\lambda}},$$

так как μ — убывающая функция от λ; поэтому, полагая $\frac{\sqrt{\sigma}}{\mu(\sigma)} = \sigma'$,

$$I_1 \leqslant 2\int\limits_0^{\sigma'} d\alpha \int\limits_{|u|>\alpha} \frac{2dG(u)}{|u|} = 4\int\limits_0^{\sigma'} d\alpha \int\limits_\alpha \frac{dG(u)}{u} + 4\int\limits_0^{\sigma'} d\alpha \int^{-\alpha} \frac{dG(u)}{|u|}.$$

Вследствие симметрии достаточно рассмотреть первый из этих интегралов; интегрируя по частям, приводим его к виду

$$\Big|_0^{\sigma'} \alpha \int\limits_\alpha \frac{dG(u)}{u} + \int\limits_0^{\sigma'} dG(\alpha) < +\infty,$$

вследствие чего интеграл I_1 имеет конечное значение.

Для оценки интеграла I_2 мы сделаем замену переменной, полагая

$$\sqrt{\lambda} = \alpha.$$

Это дает

$$I_2 \leqslant \int_0^{\sigma} d\lambda \int\limits_{|u| > \sqrt{\lambda}} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\sigma}} \alpha\, d\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) + 2\int_0^{\sqrt{\sigma}} \alpha\, d\alpha \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u).$$

И здесь из соображений симметрии достаточно рассмотреть первый из интегралов правой части; интегрируя снова по частям, приводим его к виду

$$\left|_0^{\sqrt{\sigma}} \alpha^2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) + \int_0^{\sqrt{\sigma}} (1+\alpha^2)\, dG(\alpha) < +\infty;\right.$$

этим установлена конечность интеграла I_2 и вместе с тем завершено доказательство теоремы 1.

Непосредственным следствием ее является очевидно следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы однородный процесс без последействия подчинялся локальному закону повторного логарифма, необходимо и достаточно, чтобы он содержал компоненту, распределенную по закону Гаусса.*

При этом локальный закон повторного логарифма понимается в том смысле, что

$$\limsup_{\lambda \to 0} \frac{|x(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}}} \tag{18}$$

с вероятностью 1 равен некоторому положительному числу. Теоремы 1 и 2 показывают, что верхний предел (18) во всех случаях конечен с вероятностью 1; он положителен или равен нулю, смотря по тому, содержит ли процесс $x(\lambda)$ гауссовскую компоненту или нет.

§ 4. Доказательство невозможности понижения найденной границы

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $v(\lambda)$ — положительная неубывающая функция, определенная для $0 < \lambda < \sigma$ и такая, что*

$$\omega(\lambda) = \frac{v(\lambda)}{\sqrt{\lambda \lg\lg \frac{1}{\lambda}}} \to 0$$

при $\lambda \to 0$. Тогда существует однородный процесс без последействия, не содержащий гауссовской компоненты и для которого $v(\lambda)$ не является верхней границей.

Доказательство. 1. Положим

$$G(u) = \begin{cases} 0 & (u \leqslant 0), \\ \sup\limits_{\lambda \leqslant u} \omega(\lambda) & (0 < u \leqslant \sigma), \\ \sup\limits_{\lambda \leqslant \sigma} \omega(\lambda) & (u \geqslant \sigma), \end{cases}$$

и рассмотрим (очевидно не содержащий гауссовской компоненты) процесс $x(\lambda)$, определяемый каноническим представлением

$$\psi(t) = \lg \varphi(t) = \int (\cos tu - 1) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u).$$

Рассмотрим снова определенные нами в § 3, п. 2 функции распределения $\Phi_{\lambda 1}(x)$ и $\Phi_{\lambda 2}(x)$ и случайные величины x_1 и x_2. Так как все рассматриваемые законы распределения симметричны, то

$$P\{|x(\lambda)| > cv(\lambda)\} = 2P\{x(\lambda) > cv(\lambda)\} \geqslant 2P\{x_1 > cv(\lambda),\ x_2 \geqslant 0\} \geqslant$$
$$\geqslant P\{x_1 > cv(\lambda)\} = 1 - \Phi_{\lambda 1}\{cv(\lambda)\}.$$

Это неравенство в силу основной леммы показывает, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить расходимость интеграла

$$\int_0^\sigma \{1 - \Phi_{\lambda 1}[cv(\lambda)]\} \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{19}$$

при некотором $c > 0$. При этом закону распределения $\Phi_{\lambda 1}(x)$ соответствует характеристическая функция $\varphi_1(t)$, определяемая каноническим представлением

$$\psi_1(t) = \lg \varphi_1(t) = \int_0^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\cos tu - 1) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

где

$$\mu = \mu(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\lg \lg \frac{1}{\lambda}}.$$

2. Предварительно докажем две леммы.

ЛЕММА 1.

$$1 - \Phi_{\lambda 1}(x) < \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4\lambda g}} & (0 < x \leqslant 2\mu \sqrt{\lambda}\, g), \\ e^{-\frac{\mu x}{2\sqrt{\lambda}}} & (x > 2\mu \sqrt{\lambda}\, g), \end{cases}$$

где $g = G\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)$.

Доказательство. Так как при $0 < z \leqslant 1$

$$\operatorname{ch} z - 1 < \frac{2}{3} z^2,$$

то при $0 < a \leqslant \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ и достаточно малом λ

$$\psi_1(ai) = \int_0^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}} (\operatorname{ch} au - 1) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) < a^2 g, \tag{20}$$

а поэтому

$$Ee^{ax_1} = \{\varphi_1(ai)\}^\lambda = e^{\lambda \psi_1(ai)} < e^{\lambda a^2 g},$$

и следовательно, в силу неравенства Чебышева

$$1 - \Phi_{\lambda 1}(x) \leqslant e^{-ax} E e^{ax_1} < e^{\lambda a^2 g - ax};$$

полагая

$$a = \frac{x}{2\lambda g} \qquad (0 < x \leqslant 2\mu\sqrt{\lambda}\, g),$$

$$a = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \qquad (x > 2\mu\sqrt{\lambda}\, g),$$

мы получаем в обоих случаях то, что требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *При* $a > 0$

$$Ee^{ax_1} \geqslant e^{\frac{1}{2}\lambda a^2 g}$$

Доказательство является непосредственным следствием соотношения

$$Ee^{ax_1} = e^{\lambda\psi_1(ai)}$$

и формулы (20), так как при любом z

$$\operatorname{ch} z - 1 \geqslant \frac{1}{2} z^2.$$

3. Во всем дальнейшем мы полагаем

$$a = \frac{\mu}{4\sqrt{\lambda}}.$$

В силу леммы 1 мы имеем

$$e^{ax}\{1 - \Phi_{\lambda 1}(x)\} \to 0 \qquad (x \to \infty),$$

вследствие чего интеграция по частям дает

$$Ee^{ax_1} = -\int e^{ax}\, d\,[1 - \Phi_{\lambda 1}(x)] = a \int e^{ax}[1 - \Phi_{\lambda 1}(x)]\, dx.$$

Положим

$$I_1 = \int^{0} e^{ax}[1 - \Phi_{\lambda 1}(x)]\, dx,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}a\lambda g} e^{ax}[1 - \Phi_{\lambda 1}(x)]\, dx,$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}a\lambda g}^{8a\lambda g} e^{ax}[1 - \Phi_{\lambda 1}(x)]\, dx,$$

$$I_4 = \int_{8a\lambda g} e^{ax}[1 - \Phi_{\lambda 1}(x)]\, dx,$$

так что

$$Ee^{ax_1} = a\,(I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \tag{21}$$

Очевидно,

$$aI_1 \leqslant a \int^{0} e^{ax}\, dx = 1.$$

Далее, в силу леммы 1

$$aI_4 = a \int_{2\mu\sqrt{\lambda}\, g} e^{ax}\{1 - \Phi_{\lambda 1}(x)\}\, dx \leqslant a \int_0 e^{-ax}\, dx = 1.$$

Переходя теперь к оценке aI_2, мы допустим, что при $\lambda \to 0$

$$\omega(\lambda) \lg\lg\frac{1}{\lambda} \to \infty. \tag{22}$$

Легко видеть, что это условие не нарушает общности доказательства: если бы оно не было выполнено, мы могли бы вместо $\omega(\lambda)$ рассматривать функцию

$$\omega^*(\lambda)=\max\left\{\omega(\lambda),\quad \frac{1}{\sqrt{\lg\lg\frac{1}{\lambda}}}\right\},$$

очевидно удовлетворяющую поставленному условию; так как $\omega(\lambda)\leqslant\omega^*(\lambda)$, то доказываемая теорема, будучи установленной для $\omega^*(\lambda)$, a fortiori будет верна для $\omega(\lambda)$. В силу условия (22) при $\lambda\to 0$

$$\mu^2 g=\frac{1}{4}\lg\lg\frac{1}{\lambda}\,G\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)\sim\frac{1}{4}\lg\lg\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\,G\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\lg\lg\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\,\omega\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right)\to\infty. \tag{23}$$

Заметив это, находим

$$aI_2=a\int\limits_0^{\frac{1}{8}\mu\sqrt{\lambda}g} e^{ax}\{1-\Phi_{\lambda 1}(x)\}\,dx.$$

Полагая

$$\psi(x)=ax-\frac{x^2}{4\lambda g},$$

мы имеем в силу леммы 1

$$e^{ax}\{1-\Phi_{\lambda 1}(x)\}<e^{\psi(x)};$$

а так как в пределах интеграции

$$\psi'(x)=a-\frac{x}{2\lambda g}\geqslant\frac{\mu}{4\sqrt{\lambda}}-\frac{\mu}{16\sqrt{\lambda}}>0,$$

то

$$\psi(x)\leqslant\psi\left(\frac{1}{8}\mu\sqrt{\lambda}\,g\right)=\mu^2 g\,(2^{-5}-2^{-8}),$$

и следовательно,

$$aI_2<a\cdot\frac{1}{2}a\lambda g e^{\mu^2 g(2^{-5}-2^{-8})}=$$

$$=e^{\frac{1}{32}\mu^2 g}\cdot\frac{1}{32}\mu^2 g e^{-2^{-8}\mu^2 g}.$$

В силу (23) это дает при достаточно малом λ

$$aI_2<\frac{1}{3}e^{\frac{1}{32}\mu^2 g},$$

а применяя лемму 2, находим

$$aI_2<\frac{1}{3}Ee^{ax_1}.$$

Так как в силу (23) и леммы 2 величина Ee^{ax_1} при $\lambda\to 0$ безгранично возрастает, то оценки, найденные нами для I_1, I_2 и I_4, позволяют, очевидно, утверждать, что при достаточно малом λ

$$a(I_1+I_2+I_4)<\frac{1}{2}Ee^{ax_1};$$

в силу же (21) и той же леммы 2 это дает

$$aI_3>\frac{1}{2}Ee^{ax_1}\geqslant\frac{1}{2}e^{\frac{1}{32}\mu^2 g}.$$

Таким образом мы имеем

$$\frac{1}{2} e^{\frac{1}{32}\mu^2 g} < aI_3 = a \int\limits_{\frac{1}{2}a\lambda g}^{8a\lambda g} e^{ax}\{1-\Phi_{\lambda 1}(x)\}\,dx <$$

$$< ae^{8a^2\lambda g}\left\{1-\Phi_{\lambda 1}\left(\frac{1}{2}a\lambda g\right)\right\} 8a\lambda g =$$

$$= \frac{1}{2}\mu^2 g e^{\frac{1}{2}\mu^2 g}\left\{1-\Phi_{\lambda 1}\left(\frac{1}{8}\mu\sqrt{\lambda}\, g\right)\right\},$$

откуда при достаточно малом λ

$$1-\Phi_{\lambda 1}\left(\frac{1}{8}\mu\sqrt{\lambda}\, g\right) > \frac{1}{\mu^2 g} e^{\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{2}\right)\mu^2 g} > e^{-\mu^2 g};$$

но по определению функции $G(u)$

$$g = \mathcal{G}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right) \geqslant G(\lambda) \geqslant \omega(\lambda);$$

с другой стороны, при достаточно малом λ, $g < 4$ и следовательно

$$1-\Phi_{\lambda 1}\left(\frac{1}{8}\mu\sqrt{\lambda}\,\omega(\lambda)\right) = 1-\Phi_{\lambda 1}\left(\frac{1}{16}v(\lambda)\right) >$$

$$> e^{-4\mu^2} = e^{-\lg\lg\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lg\frac{1}{\lambda}};$$

это показывает, что интеграл (19) расходится при $c = \frac{1}{16}$ и вместе с тем завершает собою доказательство теоремы 3.

Институт математики
Московского гос. университета.

Поступило
5. IX. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lévy P., Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, Ann. d. R. Scuola Norm. di Pisa II, 3, 337—366 (1934).

[2] Kolmogoroff A., Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo, Atti d. R. Accad. d. Lincei (6), 15, 805—808, 866—869 (1932).

[3] Хинчин А. Я., Асимптотические законы теории вероятностей, ОНТИ, 1936.

[4] Хинчин А. Я., Две теоремы о стохастических процессах с однотипными приращениями, Мат. сборн. 3 (45): 3, 577—584 (1938).

[5] Petrowsky I., Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Comp. Math. I, 383—419 (1935).

[6] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ 1938.

A. KHINTCHINE. SUR LA CROISSANCE LOCALE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES HOMOGÈNES À ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS

RÉSUMÉ

Un processus stochastique est une famille $x(\lambda)$ de variables aléatoires, le paramètre λ étant susceptible de toute valeur réelle. Le processus est dit homogène lorsque la loi de distribution de $x(\lambda_0+\lambda)-x(\lambda_0)$ ne dépend que de λ, et à accroissements indépendants lorsque, les intervalles (a, b) et (c, d) étant sans point commun, $x(b)-x(a)$ et $x(d)-x(c)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Nous ne consi-

dérons dans cet article que des processus stochastiques possèdant ces deux propriétés.

Notre but est l'étude de l'allure possible de $x(\lambda)-x(0)$ pour les valeurs très petites de λ; nous écrirons $x(\lambda)$ au lieu de $x(\lambda)-x(0)$, en posant $x(0)=0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Soit $u(\lambda)$ une fonction positive non décroissante définie pour $0 < \lambda < \sigma$ et telle que $\lim\limits_{\lambda \to 0} u(\lambda)=0$. Nous disons que $u(\lambda)$ est une limite supérieure de $x(\lambda)$, lorsque la relation

$$\frac{x(\lambda)}{u(\lambda)} \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow 0)$$

a la probabilité 1.

Désignons par $P_c(\lambda)$ la probabilité de l'inégalité $|x(\lambda)| > cu(\lambda)$. On a alors le

LEMME FONDAMENTAL. *Pour que $u(\lambda)$ soit une limite supérieure de $x(\lambda)$, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\int_0^\sigma P_c(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

soit finie pour tout $c > 0$.

A l'aide de ce lemme et faisant usage de la formule bien connue de P. Lévy pour la fonction caractéristique de $x(\lambda)$, nous obtenons ensuite les résultats suivants.

THÉORÈME 1. *La fonction $\sqrt{\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}$ est une limite supérieure pour tout processus $x(\lambda)$ ne contenant pas de composante gaussienne.*

THÉORÈME 2. *Pour que $x(\lambda)$ obéit à la loi locale du logarithme itéré, il faut et il suffit qu'il contienne une composante répartie suivant une loi de Gauss.*

(On entend par loi locale du logarithme itéré le fait que les inégalités

$$0 < \limsup_{\lambda \to 0} \frac{|x(\lambda)|}{\sqrt{\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}} < +\infty$$

ont la probabilité 1.)

THÉORÈME 3. *Soit $u(\lambda)$ une fonction ayant les propriétés mentionnées et telle que*

$$\frac{u(\lambda)}{\sqrt{\lambda \lg \lg \frac{1}{\lambda}}} \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow 0);$$

il existe alors un processus $x(\lambda)$ sans composante gaussienne et tel que $u(\lambda)$ n'est pas la limite supérieure de $x(\lambda)$.

Nous montrons enfin que certains résultats que nous avons obtenus antérieurement [4] concernant les processus obéissant à des lois stables ne présentent qu'une conséquence presque triviale de notre lemme fondamental.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathematique

А. О. ГЕЛЬФОНД

О ПРИБЛИЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ ОТНОШЕНИЯ ЛОГАРИФМОВ ДВУХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В работе доказывается, что при α и β алгебраических, $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ иррациональном и θ алгебраическом, удовлетворяющем уравнению степени n и высоты H, при неограниченно растущем H и постоянном n, имеет место неравенство $\left|\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-\theta\right|>e^{-\ln^{3+\varepsilon}H}$, $H>H'(\varepsilon)$. В работе приведены также некоторые следствия этого неравенства.

В настоящей работе показывается, что отклонение алгебраического числа θ

$$H_0\theta^n+H_1\theta^{n-1}+\ldots+H_n=0,\quad \max_{0\leqslant i\leqslant n}|H_i|\leqslant H \tag{1}$$

от иррационального отношения $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$, где α и β—алгебраические числа, $\alpha\neq 0, 1$, $\beta\neq 0, 1$, будет удовлетворять неравенству

$$\left|\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-\theta\right|>e^{-\ln^{3+\varepsilon}H},\quad \varepsilon>0, \tag{2}$$

для всякого ε, начиная с некоторого H, при постоянном n.

Доказательство этого предложения будет несколько отличаться от доказательства неравенства (2) в моей заметке «О приближениях трансцендентных чисел алгебраическими» [ДАН СССР, т. II, № 3—4 (1935) стр. 177—182].

В противоречие с неравенством (2) допустим, что существует такое $\varepsilon>0$, что неравенство

$$\left|\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}-\theta\right|<e^{-\ln^{3+\varepsilon}H} \tag{3}$$

при θ, удовлетворяющем уравнению (1), фиксированном n и H, стремящемся к бесконечности, имеет бесчисленное множество решений.

Пусть N будет достаточно большое число, связанное с H соотношением

$$H=e^{N^{1-\delta}},\quad \delta=\frac{\varepsilon}{6+2\varepsilon}, \tag{4}$$

причем предполагается, что при таком H выполняется неравенство (3) Рассмотрим тогда функцию

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}\,\alpha^{kz}\beta^{lz},\quad |C_{k,l}|\leqslant C \tag{5}$$

и одновременно функции

$$f_s(z) = \ln^{-s}\beta\, f^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} C_{k,l}\left(k\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}+l\right)^s \alpha^{kz}\beta^{lz}. \tag{6}$$

Нетрудно установить непосредственной оценкой величин, стоящих в правой части равенства (6), неравенство для $f_s(z)$. Мы будем иметь

$$|f_s(z)| < Ce^{\lambda_0 N|z| + (\lambda_1+s)\ln N}, \tag{7}$$

где λ_0 и λ_1 не зависят от N, s и z. Если t и все $C_{k,l}$, $k=0, 1, \ldots, N$, $l=0, 1, 2, \ldots, N$, будут целыми рациональными числами, то при $z=t$, $f_s(t)$ будет многочленом с коэффициентами, принадлежащими алгебраическому телу, образованному числами α и β, относительно отношения $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$.

Мы будем обозначать этот многочлен через $P_{s,t}\left(\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\right)$, т. е.

$$f_s(t) = P_{s,t}\left(\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\right). \tag{8}$$

Предположим теперь, что $C_{k,l}$ целые рациональные числа, $|C_{k,l}| \leqslant C$, и положим $C = 10^{N^2}$. Тогда, давая этим числам $C_{k,l}$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant l \leqslant N$, различные неотрицательные целые рациональные значения в указанных пределах, мы получим $(C-1)^{(N+1)^2} - 1$ различных функций $f(z)$, определяемых равенством (5). Пользуясь принципом Дирихле, мы можем выбрать систему значений целых положительных чисел $C_{k,l}$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant l \leqslant N$, в совокупности отличных от нуля, $|C_{k,l}| \leqslant C$, таких, что для соответствующей этой системе функции $f(z)$ одновременно выполнены $r_1 r_2$ неравенств, $r_1 = [N^{1+\delta}]$, $r_2 = \left[\frac{N^{1-\delta}}{2\sqrt{\ln N}}\right]$,

$$|f_s(t)| < 4e^{-N^2 \cdot \ln 10 \cdot \sqrt{\ln N} + \lambda_2 N^2}, \tag{9}$$

где t пробегает все целые числа $0 \leqslant t \leqslant r_2 - 1$, $0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1$.

Действительно, из неравенства (7) следует, что при $C = 10^{N^2}$ будет иметь место неравенство

$$|f_s(t)| < e^{\ln 10\, N^2 + \lambda_0 N t + (\lambda_1 + s)\ln N}, \tag{10}$$

или, при $t \leqslant \left[\frac{N^{1-\delta}}{2\sqrt{\ln N}}\right]$, $s \leqslant [N^{1+\delta}]$, неравенство

$$|f_s(t)| < e^{\lambda_2 N^2}, \quad \lambda_2 = \ln 10 + \lambda_0 + \lambda_1 + 1. \tag{11}$$

В пространстве $2r_1r_2$ измерений возьмем куб того же числа измерений, со стороной $2e^{\lambda_2 N^2}$, центром, совпадающим с началом декартовой координатной системы, и с гранями, перпендикулярными к координатным осям. Иначе говоря, этот куб будет определяться совокупностью неравенств $|x_k| \leqslant e^{\lambda_2 N^2}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_{2r_1r_2}$ — декартовы координаты точки нашего пространства. На каждой из осей этого пространства будем откладывать одну из величин $If_s(t)$ или $Rf_s(t)$, $0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1$, $0 \leqslant t \leqslant r_2 - 1$, при s и t целых положительных, и всех возможных целых положительных $C_{k,l}$, $0 \leqslant C_{k,l} \leqslant 10^{N^2}$. В нашем пространстве $2r_1r_2$ измерений мы получим тогда $(10^{N^2}+1)^{(N+1)^2}$ точек с координатами

$If_s(t)$, $Rf_s(t)$, $0 \leqslant s \leqslant r_1-1$, $0 \leqslant t \leqslant r_2-1$, соответствующих каждая одной из функций $f(z)$. Вследствие неравенства (4) все эти точки будут находиться внутри нашего куба со стороной $2e^{\lambda_2 N^2}$. Разделив каждое из ребер этого куба на $[10^{N^2\sqrt{\ln N}}]$ частей и проведя в каждой из точек деления плоскость, перпендикулярную ребру, мы разобьем наш куб на $[10^{N^2\sqrt{\ln N}}]^{2r_1r_2}$ одинаковых кубиков со стороной $2e^{\lambda_2 N^2}[10^{N^2\sqrt{\ln N}}]^{-1}$. Как нетрудно заметить, число точек, взятых нами в пространстве $2r_1r_2$ измерений и находящихся в кубе со стороной $2e^{\lambda_2 N^2}$, больше числа маленьких кубиков, так как

$$[10^{N^2\sqrt{\ln N}}]^{2r_1r_2} < (10^{N^2}+1)^{(N+1)^2}. \tag{12}$$

Поэтому по крайней мере две точки находятся в одном из кубиков (принцип Дирихле!). Иначе говоря, будут существовать две функции $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$, обладающие тем свойством, что соответствующие им точки в нашем пространстве будут находиться в одном и том же кубике. Отсюда следует, что для функции $f(z)=f^{(1)}(z)-f^{(2)}(z)$ будут одновременно выполнены r_1r_2 неравенств

$$|f_s(t)| \leqslant 2\sqrt{2}\,e^{\lambda_2 N^2}[10^{N^2\sqrt{\ln N}}]^{-1} < 4e^{\lambda_2 N^2-\ln 10 N^2\sqrt{\ln N}}, \tag{13}$$
$$0 \leqslant s \leqslant r_1-1, \quad 0 \leqslant t \leqslant r_2-1,$$

так как разность между координатами точек, соответствующих функциям $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$, не превышает стороны маленького кубика.

Итак, мы построили функцию, определяемую равенством (5) при целых рациональных коэффициентах $C_{k,l}$, $|C_{k,l}| \leqslant 10^{N^2}$, для которой выполнены одновременно r_1r_2 неравенств (13). С этой построенной нами функцией $f(z)$ мы будем иметь дело во всех последующих рассуждениях.

Представим нашу функцию $f(z)$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)[z(z-1)\ldots(z-r_2+1)]^{r_1}}{[\xi(\xi-1)\ldots(\xi-r_2+1)]^{r_1}(\xi-z)}\,d\xi+$$
$$+\sum_{t=0}^{r_2-1}\sum_{s=0}^{r_1-1}\frac{f^{(s)}(t)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_t}\frac{[z(z-1)\ldots(z-r_2+1)]^{r_1}(\xi-t)^{s-r_1}}{[\xi(\xi-1)\ldots(\xi-t+1)(\xi-t-1)\ldots(\xi-r_2+1)]^{r_1}(\xi-z)}\,d\xi, \tag{14}$$

где $r_1=[N^{\gamma_1}]$; $r_2=[\eta\ln^{\gamma_3}N\cdot N^{\gamma_2}]$; $\frac{3}{2} \geqslant \gamma_1 \geqslant 1$; $\frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant 1$; $4 > \gamma_2 \geqslant 1-\delta$; $\gamma_3=-\frac{1}{2}, 0$; γ_1, γ_2, γ_3 и η не зависят от N, Γ — окружность $|\xi|=N^{\gamma_1+\gamma_2-1}$, Γ_t — окружности $|\xi-t|=\frac{1}{2}$, $|z| \leqslant N^{\gamma_0}$, $\gamma_0 < \gamma_2$. С помощью этой формулы мы можем доказать следующую лемму:

ЛЕММА I. *Если $f(z)$ подчиняется неравенству*

$$|f(z)| \leqslant e^{\lambda_0 N|z|+\lambda_3 N^2}, \tag{15}$$

где λ_0 и λ_3 не зависят от N и z, то существуют константы λ_4, λ_5, λ_6,

λ_7, λ_8, *не зависящие от* $N, \sigma, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta$, *такие, что при* $N > N_1$; $\frac{3}{2} \geqslant \gamma_1 \geqslant 1+\delta$; $4 \geqslant \gamma_2 \geqslant 1-\delta$; $\gamma_3 = -\frac{1}{2}, 0$; $\frac{1}{2} \leqslant \eta \leqslant 1$; $|z| \leqslant N^{\gamma_0}$; $\gamma_0 < \gamma_1+\gamma_2-1$, $\sigma \leqslant N^{1+\delta}$, $N > N_1$, *выполняется неравенство*

$$|f^{(\sigma)}(z)| < e^{\lambda_4 N^2 + \lambda_5 N^{1+\gamma_0} + \lambda_6 N^{\gamma_1+\gamma_2} - (\gamma_1+\gamma_2-1-\gamma_0) N^{\gamma_1+\gamma_2} \ln^{1+\gamma_3} N} +$$
$$+ \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant r_1-1 \\ 0 \leqslant t \leqslant r_2-1}} |f^{(s)}(t)| \, e^{(\gamma_0-\gamma_2) N^{\gamma_1+\gamma_2} \ln^{1+\gamma_3} N + \lambda_7 N^{\gamma_1+\gamma_2} + \lambda_8 N^2}, \tag{16}$$
$$r_1 = [N^{\gamma_1}], \quad r_2 = [\eta N^{\gamma_2} \ln^{1+\gamma_3} N].$$

Для доказательства этой леммы мы прежде всего можем получить с помощью формулы (14) неравенство при $|z| < 2N\gamma_0$:

$$|f(z)| < e^{\lambda_1' N^2 + \lambda_2' N^{1+\gamma_0} + \lambda_3' N^{\gamma_2+\gamma_1} - (\gamma_1+\gamma_2-1-\gamma_0) N^{\gamma_1+\gamma_2} \ln^{1+\gamma_3} N} +$$
$$+ \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant r_1-1 \\ 0 \leqslant t \leqslant r_2-1}} |f^{(s)}(t)| \, e^{(\gamma_0-\gamma_2) N^{\gamma_1+\gamma_2} \ln^{\gamma_3+1} N + \lambda_4' N^{\gamma_1+\gamma_2}}, \tag{17}$$

где $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \lambda_4'$ не зависят от N и $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta$.

Далее, пользуясь формулой Коши, мы получим, при $|z| \leqslant N^{\gamma_0}$,

$$|f^{(\sigma)}(z)| \leqslant |f(z)| \, e^{\sigma \ln \sigma}, \quad \sigma \leqslant N^{1+\delta}. \tag{18}$$

Отсюда следует наша лемма. Из нее следует также

ЛЕММА I'. *При условиях и обозначениях леммы I имеет место неравенство*

$$|f_\sigma(t)| < e^{\lambda_4 N^2 + \lambda_5 N^{1+\gamma_0} + \lambda_6 N^{\gamma_1+\gamma_2} - (\gamma_1+\gamma_2-1-\gamma_0) N^{\gamma_1+\gamma_2} \ln^{1+\gamma_3} N} +$$
$$+ \max_{\substack{0 \leqslant s \leqslant r_1-1 \\ 0 \leqslant t \leqslant r_2-1}} |f^{(s)}(t)| \, e^{(\gamma_0-\gamma_1) N^{\gamma_1+\gamma_3} \ln^{1+\gamma_3} N + \lambda_7 N^{\gamma_1+\gamma_2} + \lambda_8' N^2}, \tag{19}$$
$$r_1 = [N^{\gamma_1}], \quad r_2 = [\eta N^{\gamma_2} \ln^{\gamma_3} N], \quad \sigma \leqslant N^{1+\delta}, \quad N > N_1,$$

где λ_4', λ_8', так же как и предыдущие константы λ, не зависят от η, N, σ, t, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; σ произвольно, $0 \leqslant t \leqslant N^{\gamma_0}$.

Эта лемма есть непосредственное следствие предыдущей, так как

$$f_\sigma(t) = \ln^{-\sigma} \beta \, f^{(\sigma)}(t) \quad \text{и} \quad \sigma \leqslant N^{1+\delta}.$$

Докажем еще четыре леммы, которые будут нам необходимы в дальнейшем.

ЛЕММА II. *Пусть* $f(z)$ *определяется формулой*

$$f(z) = \sum_0^N \sum_0^N C_{k,l} \, \alpha^{kz} \beta^{lz}, \quad |C_{k,l}| < 10^{N^2}, \tag{20}$$

где все $C_{k,l}$ *— целые числа,* α *и* β *— не равные нулю и единице фиксированные алгебраические числа. Пусть, далее,* θ *— алгебраическое число, удовлетворяющее уравнению* (1) *при* $H = e^{N^{1-\varepsilon}}$. *Тогда, если мы положим*

$$P_{\sigma,t}\left(\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}\right) = \ln^{-\sigma} \beta \, f^{(\sigma)}(t), \tag{21}$$

где t *— целое положительное число,* $N > N_2$, *или имеет место неравенство*

$$|P_{\sigma,t}(\theta)| > e^{-\lambda_9 N^2 - \lambda_{10} N t}, \quad \sigma \leqslant N^{1+\delta}, \tag{22}$$

где λ_9 *и* λ_{10} *не зависят от* N, t *и* σ, *или*

$$P_{\sigma,t}(\theta) = 0. \tag{22'}$$

Доказательство этой леммы очевидно, так как неравенство (22) есть одна из модификаций неравенства Лиувилля для алгебраических чисел θ, α и β.

ЛЕММА III. *Если для фиксированного* ε, *данного* N *и* $H=e^{N^{1-\delta}}$, $\delta=\frac{\varepsilon}{6+2\varepsilon}$ *выполняется неравенство* (3), *то для функции* $f(z)$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}\,\alpha^{kx}\beta^{lx},\quad |C_{k,l}|<10^{N^2}, \tag{23}$$

при $N>N_3$ *выполняется неравенство*

$$\left|P_{\sigma,t}\left(\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\right)-P_{\sigma,t}(\theta)\right|<e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}}+\lambda_{11}Nt+\lambda_{12}N^2}, \tag{24}$$

$$\sigma\leqslant N^{1+\delta},$$

где θ *удовлетворяет уравнению* (1), H *дано в условии леммы, постоянные* λ_{11} *и* λ_{12} *не зависят от* N, t *и* θ, *а* $P_{\sigma,t}(x)$ *определено равенством* (21).

Доказательство этой леммы также очевидно и основано на формуле Лагранжа и непосредственной оценке величин, входящих в состав функции $f^{(\sigma)}(t)$, $\sigma\leqslant N^{1+\delta}$.

ЛЕММА IV. *При одновременном выполнении условий леммы* I′ *и* III *имеет место неравенство*

$$|P_{\sigma,t}(\theta)|<e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}}+\lambda_{11}N^{1+\gamma_0}+\lambda_{12}N^2}+$$
$$+e^{-(\gamma_1+\gamma_2-1-\gamma_0)N^{\gamma_1+\gamma_2}\ln^{1+\gamma_3}N+\lambda_4N^2+\lambda_5N^{1+\gamma_0}+\lambda_6N^{\gamma_1+\gamma_2}}+$$
$$+\max_{\substack{0\leqslant s\leqslant r_1-1\\0\leqslant t_1\leqslant r_2-1}}|f^{(s)}(t_1)|\,e^{(\gamma_0-\gamma_2)N^{\gamma_1+\gamma_2}\ln^{1+\gamma_3}N+\lambda_7N^{\gamma_1+\gamma_2}+\lambda_8N^2}, \tag{25}$$

$$r_1=[N^{\gamma_1}],\quad r_2=[\eta N^{\gamma_2}\ln^{1+\gamma_3}N],\quad \sigma\leqslant N^{1+\delta},\quad t\leqslant N^{\gamma_0},\quad N>N_4,$$

где имеющие прежние значения величины λ_4, λ_5, λ_6, λ_7, λ_8, λ_{11}, λ_{12} *не зависят от* N, γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, η.

Доказательство этой леммы следует из неравенства

$$|P_{s,t}(\theta)|\leqslant f_s(t)+|P_{s,t}(\theta)-f_s(t)|.$$

ЛЕММА V. *Если* $P_{s,t}(\theta)=0$ *и выполнены условия леммы* III, *иначе говоря, если при этих условиях имеет место неравенство* (24), *то при условиях леммы* III *имеет также место неравенство*

$$|f^{(s)}(t)|<e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}}+\lambda_{12}Nt+\lambda_{13}N^2}, \tag{25′}$$

$$s\leqslant N^{1+\delta},\quad N>N_5,$$

где λ_{13} *не зависит от* N *и* t.

Доказательство очевидно (лемма III).

Дальше доказательство невозможности неравенства (3) идет следующим образом. Пусть при данном ε, достаточно большом N, $\delta=\frac{\varepsilon}{6+2\varepsilon}$, p, определенном далее,

$$N>\max[N_0,N_1,N_2,\ldots,N_{7+p}]\ \text{и}\ H=e^{N^{1-\delta}}$$

выполняется неравенство (3). Величину ε мы можем считать меньше $\frac{1}{2}$, так как в противном случае мы могли бы положить $\varepsilon = \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ и неравенство (3) естественно выполнялось бы a fortiori. В этом случае $\delta = \frac{\varepsilon}{6+2\varepsilon} < \frac{1}{10}$. При указанном выше N строим функцию $f(z)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} C_{k,l}\, \alpha^{kx} \beta^{lx}, \qquad |C_{k,l}| < 10^{N^2}, \tag{26}$$

с целыми $C_{k,l}$, отличными от нуля, в совокупности удовлетворяющую одновременно $r_1 r_2$, $r_1 = [N^{1+\delta}]$, $r_2 = \left[\frac{1}{2} N^{1-\delta} \ln^{-\frac{1}{2}} N\right]$, неравенствам (13):

$$|f^{(s)}(t)| < e^{\lambda_{14} N^2 - \ln 10 N^2 \sqrt{\ln N}}, \tag{27}$$
$$0 \leqslant s \leqslant r_1 - 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant r_2 - 1,$$

где λ_{14} не зависит от N; α и β — алгебраические числа, $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ — иррациональное число. Такую функцию, как это было показано вначале, можно построить для любого N. На основании леммы I', где положено $\gamma_i = \frac{1}{2}$, $\gamma_0 = 1 - \frac{\delta}{8}$, $\gamma_1 = 1 + \delta$, $\gamma_2 = 1 - \delta$, $\gamma_3 = -\frac{1}{2}$, мы сразу получим неравенство для выбранной нами, при выполнении условий (27), функции $f(z)$, именно

$$|f_\sigma(t)| < e^{-\frac{\delta}{8} N^2 \sqrt{\ln N} + \lambda_{15} N^2} + e^{-[\ln 10 - 1] N^2 \sqrt{\ln N} + \lambda_{16} N^2}, \tag{28}$$
$$\sigma \leqslant N^{1+\delta}, \qquad t \leqslant N^{1-\frac{\delta}{8}},$$

где константы λ_{15}, и λ_{16}, непосредственно связанные с предыдущими λ_i, не зависят от N.

На основании леммы II мы также будем иметь неравенство

$$|P_{\sigma,t}(\theta)| > e^{-\lambda_{17} N^2}; \quad t \leqslant N^{1-\frac{\delta}{8}}; \quad \sigma \leqslant N^{1+\delta}, \tag{29}$$

где λ_{17} не зависит от N, θ удовлетворяет уравнению (1), и $H = e^{N^{1-\delta}}$. С другой стороны, так как предположено, что, при данных N, $H = e^{N^{1-\delta}}$ и ε, выполнено неравенство (3), мы будем иметь по лемме IV

$$|P_{\sigma,t}(\theta)| < e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{18} N^2} + e^{-\frac{\delta}{8} N^2 \sqrt{\ln N} + \lambda_{15} N^2} +$$
$$+ e^{-[\ln 10 - 1] N^2 \ln^{\frac{1}{2}} N + \lambda_{16} N^2}, \tag{30}$$
$$\sigma \leqslant N^{1+\delta}, \quad t \leqslant N^{1-\frac{\delta}{8}}.$$

Сопоставляя неравенства (29) и (30), мы непосредственно убеждаемся, что при $N > N_6$ правая часть неравенства (29) станет меньше правой части неравенства (30) и значит при $0 \leqslant \sigma \leqslant N^{1+\delta}$, $0 \leqslant t \leqslant N^{1-\frac{\delta}{8}}$ и $N > N_6$, будут выполнены условия

$$P_{s,t}(\theta) = 0; \; 0 \leqslant s \leqslant N^{1+\delta}; \quad 0 \leqslant t \leqslant N^{1-\frac{\delta}{8}}. \tag{31}$$

Отсюда следует, на основании леммы V, что выполнены неравенства

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}}+\lambda_{19}N^2}, \tag{32}$$

$$0 \leqslant s \leqslant N^{1+\delta}; \quad 0 \leqslant t \leqslant N^{1-\frac{\delta}{8}}; \quad N > N_6,$$

где $\lambda_{19} = \lambda_{11} + \lambda_{13}$.

Итак, мы получили, что для выбранной нами функции $f(z)$ выполнены не только неравенства (27), но и значительно более сильные неравенства (32). Мы можем опять усилить эти неравенства, распространив их на большее число значений s и t. На основании леммы I′, полагая в ней $\eta = 1$, $\gamma_1 = 1 + \delta$, $\gamma_2 = 1 - \frac{\delta}{8}$, $\gamma_0 = 1 + \frac{3}{4}\delta$, $\gamma_3 = 0$, получим для нашей функции $f(z)$ неравенства

$$|f_\sigma(t)| \leqslant e^{-\frac{\delta}{8}N^{2+\frac{7}{8}\delta}\ln N + \lambda_{20}N^{2+\frac{7}{8}\delta}} + e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{21}N^{2+\frac{7}{8}\delta}\ln N}, \tag{33}$$

где $\sigma \leqslant N^{1+\delta}$, $t \leqslant N^{1+\frac{3}{4}\delta}$; λ_{20} и λ_{21} не зависят от N.

На основании леммы II должны иметь место неравенства

$$|P_{\sigma,t}(0)| > e^{-\lambda_{22}N^{2+\frac{7}{8}\delta}}, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant N^{1+\delta}, \quad 0 \leqslant t \leqslant N^{1+\frac{3}{4}\delta}, \tag{34}$$

где λ_{22} не зависит от N.

Из неравенства (31), вследствие леммы IV, мы будем иметь также, что

$$|P_{\sigma,t}(0)| < e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{23}N^{2+\frac{7}{8}\delta}} + e^{-\frac{\delta}{8}N^{2+\frac{7}{8}\delta}\ln N + \lambda_{24}N^{2+\frac{7}{8}\delta}}, \tag{35}$$

где λ_{23} и λ_{24} не зависят от N, $0 \leqslant \sigma \leqslant N^{1+\delta}$, $0 \leqslant t \leqslant N^{1+\frac{3}{4}\delta}$. Сопоставляя опять неравенства (32) и (33), мы убеждаемся, что при $N > N_7$ правая часть неравенство (32) станет больше правой части неравенства (33) и, значит, при $N > N_7$

$$P_{s,t}(0) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant N^{1+\delta}, \quad 0 \leqslant t \leqslant N^{1+\frac{3}{4}\delta}. \tag{36}$$

Отсюда следует, по лемме V, что при $N > N_7$

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{19}N^{2+\frac{3}{4}\delta}}. \tag{37}$$

Сравнивая неравенства (32) и (37), мы видим, что промежуток изменения t, бывший в неравенствах (32) равным $N^{1-\frac{\delta}{8}}$, в неравенствах (37) стал равным $N^{1+\frac{3}{4}\delta} = N^{1-\frac{\delta}{8}} \cdot N^{\frac{7}{8}\delta}$, иначе говоря, он вырос в $N^{\frac{7}{8}\delta}$ раз. Так как $\delta < \frac{1}{10}$, $3\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, то, выбрав такое целое положительное число p, чтобы было выполнено неравенство

$$2 < 1 - \frac{\delta}{8} + \frac{7}{8}\delta p < 2 + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38}$$

мы получим после p переходов с помощью лемм I—V, аналогичных переходу от неравенства (32) к неравенству (37), считая этот переход первым, неравенства для $f(z)$

$$|f^{(s)}(t)| < e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{19} N^{2+\frac{7p-1}{8}\delta}} \tag{39}$$

при $N > N_{6+p}$; $0 \leqslant s \leqslant N^{1+\delta}$; $0 \leqslant t \leqslant N^{1+\frac{7p-1}{8}\delta}$

Я не провожу здесь доказательства методом полной инндукции, так как оно очевидно.

Из неравенства (39) следует, что при $\sigma = 0$ и целом положительном t, $0 \leqslant t \leqslant (N+1)^2$, имеет место неравенство

$$|f(t)| < e^{-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{19} N^{2+\frac{7p-1}{8}\delta}} \quad 0 \leqslant t \leqslant (N+1)^2, \tag{40}$$

так как $1 + \frac{7p-1}{8}\delta > 2$.

С другой стороны, из неравенства (22), при $\sigma = 0$, $t \leqslant (N+1)^2$, мы будем иметь, что

$$|f(t)| = |P_{\sigma, t}(\theta)| > e^{-\lambda_{10} N^3} \tag{41}$$

Сопоставляя неравенства (40) и (41), мы видим, что при $N > N_{7+p}$ будет выполнено неравенство

$$-N^{3+\frac{\varepsilon}{2}} + \lambda_{19} N^{2+\frac{7p-1}{8}\delta} < -\lambda_{10} N^3, \tag{42}$$

так как $3 + \frac{\varepsilon}{2} > 2 + \frac{7p-1}{8}\delta$. Отсюда следует, что так как наша функция $f(z)$ построена при $N > \max[N_1, \ldots, N_{7+p}]$, то $f(t) = 0$, $t = 0, 1, \ldots, (N+1)^2$.

Вспомнив вид функции $f(z)$, мы можем следующим образом записать эти последние условия:

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} C_{k,l} (\alpha^k \beta^l)^t = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant (N+1)^2. \tag{43}$$

Рассматривая равенства (43) как систему линейных уравнений относительно $C_{k,l}$, $0 \leqslant k \leqslant N$; $0 \leqslant l \leqslant N$, мы можем утверждать, что все $C_{k,l} = 0$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant l \leqslant N$, так как детерминант этой системы есть детерминант Вандермонда и кроме того равенство $\alpha^{k_1}\beta^{l_1} = \alpha^{k_2}\beta^{l_2}$ невозможно при целых k_1, k_2, l_1, l_2, $(k_1 - k_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 \neq 0$, так как число $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ предположено иррациональным.

Мы пришли к противоречию, так как коэффициенты $C_{k,l}$ были выбраны в совокупности отличными от нуля. Этим доказывается основная

ТЕОРЕМА I. *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, неравенство*

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - \theta \right| > e^{-\ln^{3+\varepsilon} H}, \tag{44}$$

при алгебраических α и β и $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ иррациональном, а θ удовлетворяющем уравнению

$$H_0\theta^n + H_1\theta^{n-1} + \ldots + H_n = 0, \quad |H_i| \leq H, \tag{45}$$

с целыми рациональными $H_0, H_1, \ldots, H_n$ выполняется при всяком θ и H, $H \geq H'(\varepsilon)$.

Следствие. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при α и β алгебраических и $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ иррациональном, при $q > q_0(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - \frac{p}{q} \right| > e^{-\ln^{3+\varepsilon} q}, \tag{46}$$

где p и q—взаимно простые целые числа.

Из основной теоремы также следует трансцендентность $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$, если только это число иррационально, а α и β алгебраические.

Прямым следствием теоремы I является также

ТЕОРЕМА II. *Уравнение*

$$\alpha^x + \sum_{k=1}^{m_1} P_k(x, y)\,\alpha_k^x = \beta^y + \sum_{k=1}^{m_2} Q_k(x, y)\,\beta_k^x, \tag{47}$$

где $P_1(x, y), \ldots, P_{m_1}(x, y)$ и $Q_1(x, y), \ldots, Q_{m_2}(x, y)$—полиномы с целыми алгебраическими коэффициентами относительно x и y; $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}$ и $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{m_2}$—алгебраические числа, $|\alpha| > |\alpha_i|$, $i = 1, \ldots, m_1$; $|\beta| > |\beta_i|$, $i = 1, \ldots, m_2$,—имеет только конечное число решений в целых числах x и y.

Действительно, допустив существование бесчисленного множества решений у этого уравнения (47), мы непосредственно приходим к неравенству

$$|e^{x \ln \alpha - y \ln \beta} - 1| < e^{-\gamma y}, \quad \gamma > 0, \tag{48}$$

откуда следует, что неравенство

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - \frac{x}{y} \right| < e^{-\gamma_1 y}, \quad \gamma_1 > 0, \tag{49}$$

где γ_1 не зависит от x и y, имеет место для бесчисленного множества целых x и y. Мы пришли к противоречию с неравенством (44).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
21. VI. 1939

A. GELFOND. SUR L'APPROXIMATION DU RAPPORT DES LOGARITHMES DE DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES AU MOYEN DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur démontre l'inégalité suivante.

Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - \theta \right| > e^{-\ln^{3+\varepsilon} H}, \ H > H'(\varepsilon),$$

où α et β sont des nombres algébriques, $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ est irrationnel et θ est la racine de l'équation algébrique à coefficients entiers $H_0, H_1, \ldots, H_n$,

$$H_0\theta^n + H_1\theta^{n-1} + \ldots + H_n = 0, \ \max_{0 \leqslant i \leqslant n} H_i = H.$$

Comme cas particulier de cette inégalité nous obtenons l'inégalité

$$\left| \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} - \frac{p}{q} \right| > e^{-\ln^{3+\varepsilon} q}, \ q > q'(\varepsilon),$$

où p et q sont des nombres entiers rationnels.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Б. И. СЕГАЛ

О ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ С КАНОНИЧЕСКИМ РАЗЛОЖЕНИЕМ ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказаны три теоремы, характеризующие распределение целых чисел, в каноническое разложение которых входят лишь заданные простые числа с любыми показателями или с простыми показателями.

§ 1. В теории чисел имеет существенное значение так называемое каноническое разложение целого числа n,

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_l$—различные простые числа, входящие в n. Мы будем говорить, что последовательность целых чисел производится системой простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_l$, если последовательность состоит из всех целых чисел, каноническое разложение которых содержит лишь заданные простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Если производящая система состоит из одного простого числа p_1, то соответствующая последовательность целых чисел представляет геометрическую прогрессию. Но если производящая система состоит из нескольких простых чисел, то получается последовательность целых чисел, для распределения которой нельзя указать простого закона. Так, если производящая система состоит из двух простых чисел 2 и 3, то мы получаем следующую последовательность:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81, 96, ...

Поэтому представляется важным изучение законов распределения таких последовательностей. В нашей работе ([1]) мы рассматривали последовательности, производимые системой двух простых чисел, и получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $N > 0$, p_1 и p_2 данные простые числа. Тогда для числа I_N решений равенства*

$$N = d\, p_1^x p_2^y$$

в целых положительных x и y и в произвольном d, удовлетворяющем условию

$$1 \leq d \leq e^{\Delta},\ \Delta = \frac{\log \log \log N}{\log \log N},$$

имеет место асимптотическая формула

$$I_N = \frac{\log N \log\log\log N}{\log p_1 \log p_2 \log\log N} + O\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right).$$

Этот результат решает вопрос о представлении любого действительного числа с помощью членов последовательности, производимой системой простых чисел p_1 и p_2. Теорема 1 может быть значительно улучшена, если воспользоваться одной оценкой А. О. Гельфонда, относящейся к теории трансцендентных чисел ([2]). Исходя из этой оценки, мы можем заменить теорему 2 нашей работы ([1]) леммой 4, изложенной ниже; в связи с этим указанное в теореме 1 значение Δ может быть заменено следующим

$$\Delta = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Мы здесь не останавливаемся более подробно на этом результате, так как его вывод не представляет никаких затруднений.

§ 2. В настоящей работе мы прежде всего будем рассматривать представление действительных чисел с помощью членов последовательности, производимой системой трех или более простых чисел, и докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Для числа $I_{N,l}$ решений равенства*

$$N = d\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}, \tag{1}$$

где $N > 0$, $l \geqslant 3$, $p_1, p_2, \dots, p_l$ — данные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ принимают значения целых положительных чисел, d удовлетворяет условию

$$e^{-\Delta_1} \leqslant d \leqslant e^{\Delta_1},\ \Delta_1 = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}},\ \varepsilon > 0, \tag{2}$$

имеет место асимптотическая формула

$$I_{N,l} = \frac{2(\log N)^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1 \dots \log p_l} + O\left((\log N)^{l-1} e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}\right), \tag{3}$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$.

Задача становится более трудной, если рассматривать целые числа, производимые системой простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_l$, с дополнительным требованием, чтобы показатели степеней этих простых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ принимали значения не всех целых чисел, а лишь целых чисел, удовлетворяющих некоторым условиям. В настоящей работе мы еще рассматриваем числа с дополнительным требованием, — чтобы показатели принимали значения простых чисел. Другими словами, мы рассматриваем числа вида

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_l^{\pi_l},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_l$ — данные простые числа, а $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l$ пробегают значения простых чисел.

Пользуясь последними результатами И. М. Виноградова, относящимися к оценке тригонометрических сумм с простыми числами и к распределению дробных долей значений функции, аргумент которой пробегает простые числа ([3]), а также упомянутым результатом А. О. Гельфонда, мы доказываем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Для числа $J_{N,l}$ решений равенства*

$$N = dp_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_l^{\pi_l}, \tag{4}$$

где $N > 0$, $l \geqslant 3$, $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — данные простые числа, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ принимают значения простых чисел, d удовлетворяет условию

$$e^{-\Delta_1} \leqslant d \leqslant e^{\Delta_1}, \ \Delta_1 = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

имеет место асимптотическая формула

$$J_{N,l} = \frac{2(\log N)^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1 \ldots \log p_l (\log\log N)^l}\left(1 + O\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)\right). \tag{6}$$

Таким образом положительные числа можно представить в виде

$$p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} p_3^{\pi_3}$$

с точностью до сомножителя, стремящегося к единице по мере возрастания представляемого числа. Дополнением к теореме 3 служит

ТЕОРЕМА 4. *Для числа I_N решений равенства*

$$N = dp_1^{p} p_2^{y}, \tag{7}$$

где $N > 0$, p_1 и p_2 — данные простые числа, p принимает значения простых чисел, y принимает значения натуральных чисел, d удовлетворяет условию

$$1 \leqslant d \leqslant e^{\Delta}, \ \Delta = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0, \tag{8}$$

имеет место асимптотическая формула

$$I_N = \frac{e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}}{\log p_2} \int\limits_2^{\frac{\log N}{\log p_1}} \frac{du}{\log u} + O\left(\log N e^{-2(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\right). \tag{9}$$

Следует отметить, что методы доказательства теорем 3 и 4 существенно отличаются друг от друга. Хотя оба доказательства являются по существу аналитическими, но в то время как доказательство теоремы 4 базируется на изучении распределения дробных частей линейной функции от простого аргумента и таким образом при доказательстве используется периодическая функция, — метод доказательства теоремы 3 основан на использовании функции непериодической. После того как теорема 4 установлена, остается открытым вопрос о возможности приближенного представления положительных чисел в виде

$$p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2},$$

где p_1 и p_2 — заданные простые числа, а π_1 и π_2 принимают значения простых чисел.

§ 3. При доказательстве теорем 2, 3 и 4 мы будем пользоваться следующими леммами:

ЛЕММА 1. *Пусть ε и h произвольно малые положительные постоянные $\leqslant \frac{1}{6}$, $A > 2$, $a = \log A$, k целое > 0,*

$$\lambda = \frac{r}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (r, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant A, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

p пробегает простые числа. Тогда

$$\sum_{p \leqslant A} e(\lambda kp) \ll Ae^{a^\varepsilon}\sqrt{kA^{-\frac{1}{3}+h} + qA^{-1} + kq^{-1} + k^4q^{-2}}.$$

Мы пишем $e(\xi)$ вместо $e^{2\pi i\xi}$ и $A \ll B$ вместо $A = O(B)$. Это предложение принадлежит И. М. Виноградову и в несколько более общем виде опубликовано в его работе (3), теорема 3.

ЛЕММА 2. *Пусть ε и h произвольно малые положительные постоянные $< \frac{1}{6}$, $A > A_0$, где A_0 достаточно большое постоянное > 2, $a = \log A$, μ — любое действительное число, p пробегает простые числа, $\pi(A)$ означает число простых чисел, не превосходящих A,*

$$\lambda = \frac{r}{q} + \frac{\theta}{q^2},\ (r, q) = 1,\ 1 \leq q \leq A,\ |\theta| \leq 1,\ 0 < \delta \leq 1.$$

Пусть, кроме того, T означает число значений дроби

$$\{\lambda p + \mu\},\ p \leq A,$$

с условием

$$0 \leq \{\lambda p + \mu\} < \delta.$$

Тогда

$$T = \delta\pi(A) + O\left(Ae^{a^\varepsilon}\sqrt{A^{-\frac{1}{3}+h} + A^{-1+h}q^{1-h} + q^{-1+h}}\right).$$

Эта лемма лишь своей формулировкой отличается от теоремы 4, опубликованной в работе И. М. Виноградова (3).

ЛЕММА 3. *Пусть ε сколь угодно малое положительное число, α и β алгебраические числа, $\frac{\log \alpha}{\log \beta}$ иррационально, $(r, q) = 1$, $q > q_0(\varepsilon)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\log \alpha}{\log \beta} - \frac{r}{q}\right| > e^{-(\log q)^{3+\varepsilon}}.$$

Это предложение принадлежит А. О. Гельфонду и опубликовано в его работе (2) (теорема 1, следствие).

ЛЕММА 4. *Если p_1 и p_2 два простых числа, ε сколь угодно малое положительное число и*

$$\frac{\log p_2}{\log p_1} = \frac{r}{q} + \frac{\theta}{q\tau},\ (r, q) = 1,\ q \leq \tau,\ 0 < \theta < 1,$$

то для достаточно больших значений τ имеет место неравенство

$$q > e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.$$

Доказательство. Отношение $\frac{\log p_2}{\log p_1}$ иррационально. Кроме того нетрудно убедиться в том, что с возрастанием τ неограниченно возрастает q [см., например, теорему 2, опубликованную в моей работе (1)]. Поэтому, применяя лемму 3, имеем

$$\left|\frac{\theta}{q\tau}\right| > e^{-(\log q)^{3+\varepsilon}},$$

и тем более

$$\frac{1}{\tau} > e^{-(\log q)^{3+\varepsilon}}.$$

Отсюда мы находим

$$e^{(\log q)^{3+\varepsilon}} > \tau,$$

или

$$q > e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 5. *Для функции*

$$\varphi(y, \Delta, \delta) = \frac{1}{2^{s-1}\pi^{s+1}} \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi\Delta z \sin^s 2\pi\delta z}{\delta^s z^{s+1}} e(yz)\, dz$$

при $\delta < \Delta/s$ *имеем*

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \quad \textit{когда} \quad \Delta + s\delta \leqslant |y|, \\ 0 \leqslant \varphi &\leqslant 1, \quad \textit{когда} \quad \Delta - s\delta \leqslant |y| \leqslant \Delta + s\delta, \\ \varphi &= 1, \quad \textit{когда} \quad |y| \leqslant \Delta - s\delta. \end{aligned}$$

Эта лемма проверяется легко, если воспользоваться интегралом

$$\int_0^\infty \frac{\sin yz}{z}\, dz,$$

равным $+\frac{\pi}{2}$, $0, -\frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, будет ли y больше, равно или меньше нуля [см., например, теорему 1 нашей работы (4)].

ЛЕММА 6. *Если* α, P *и* Q *любые действительные числа, причем* $P \leqslant Q$, *то*

$$\left| \sum_{P \leqslant x \leqslant Q} e(\alpha x) \right| < \frac{1}{2(\alpha)},$$

где (α) *означает расстояние от* α *до ближайшего целого.*

Доказательство этой леммы элементарно [см., например, лемму 6 главы I книги И. М. Виноградова (5)].

ЛЕММА 7. *Если* K *принимает целые значения, а* L *любое положительное целое число, то*

$$\int_0^L e(Kz)\, dz$$

равен нулю, если $K \neq 0$, *и равен* L, *если* $K = 0$.

Эта лемма проверяется непосредственно.

ЛЕММА 8. *Для числа* T_l *целых точек в области*

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_l x_l \leqslant P, \quad x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \ldots, x_l \geqslant 0, \tag{10}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ *положительны, имеем*

$$T_l = \frac{P^l}{l!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l} + O(P^{l-1}).$$

Доказательство. Для случая $l = 1$ лемма очевидна. Допустим, что лемма справедлива для $l - 1$. Тогда для определенного x_l число целых точек в области

$$\gamma_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \gamma_{l-1} x_{l-1} \leqslant P - \gamma_l x_l$$

будет равно

$$\frac{(P - \gamma_l x_l)^{l-1}}{(l-1)!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{l-1}} + O(P^{l-2}).$$

Отсюда мы заключаем, что

$$T_l = \sum_{x_l=1}^{\left[\frac{P}{\gamma_l}\right]} \frac{(P-\gamma_l x_l)^{l-1}}{(l-1)!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{l-1}} + O(P^{l-1}) =$$

$$= \frac{1}{(l-1)!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{l-1}} \sum_{x_l=1}^{\left[\frac{P}{\gamma_l}\right]} \sum_{\lambda=0}^{l-1} (-1)^\lambda \binom{l-1}{\lambda} P^{l-\lambda-1}\gamma_l^\lambda x_l^\lambda + O(P^{l-1}) =$$

$$= \frac{1}{(l-1)!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{l-1}} \sum_{\lambda=0}^{l-1} (-1)^\lambda \binom{l-1}{\lambda} P^{l-\lambda-1}\gamma_l^\lambda \sum_{x_l=1}^{\left[\frac{P}{\gamma_l}\right]} x_l^\lambda + O(P^{l-1}) =$$

$$= \frac{P^l}{(l-1)!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l} \sum_{\lambda=0}^{l-1} (-1)^\lambda \binom{l-1}{\lambda} \frac{1}{\lambda+1} + O(P^{l-1}),$$

или окончательно

$$T_l = \frac{P^l}{l!\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l} + O(P^{l-1}).$$

§ 4. Переходим к доказательству теоремы 2. Полагаем

$$A = \log N, \quad a = \log A.$$

Кроме чисел ε и ε_0 введем еще произвольно малые положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$, удовлетворяющие следующим условиям

$$\varepsilon > \varepsilon_0, \quad \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_8.$$

Заметим, что с помощью леммы 5 мы легко получаем для $I_{N,l}$ следующее соотношение

$$I_{N,l} + R = \sum_{\alpha_1 \leqslant A} \cdots \sum_{\alpha_l \leqslant A} \varphi(\alpha_1 \log p_1 + \ldots + \alpha_l \log p_l - A, \Delta, \delta),$$

где

$$\Delta = \Delta_1 + s\delta, \quad \delta = e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_1}}, \quad s = a^{\frac{2}{3}+\varepsilon_2}, \tag{11}$$

а R означает погрешность, соответствующую представлениям N в форме (1), когда $\log d$ удовлетворяет условиям

$$-\Delta - s\delta \leqslant \log d \leqslant -\Delta + s\delta$$

или

$$\Delta - s\delta \leqslant \log d \leqslant \Delta + s\delta.$$

После простых преобразований мы получаем

$$I_{N,l} + R = D\int_0^\infty U S_1 S_2 \ldots S_l\, e(-zA)\, dz, \tag{12}$$

где

$$D = \frac{1}{2^{\varkappa-1}\pi^{\varkappa+1}}, \quad U = \frac{\sin 2\pi\Delta z \sin^\varkappa 2\pi\delta z}{\delta^\varkappa z^{\varkappa+1}};$$

$$S_\lambda = \sum_{\alpha_\lambda \leqslant A} e(z\alpha_\lambda \log p_\lambda), \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Введем числа M, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{array}{l}\log M = A \pm 2\mu\Delta_1, \ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \\ A(1-\eta) < \log M < A(1+\eta),\end{array}\right\} \qquad (13)$$

$$\eta = e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_5}}.$$

Легко проверить, что для числа $I_{M,l}$ представлений M в форме (1) имеем по аналогии с (12)

$$I_{M,l} + R = D\int_0^\infty US_1 S_2 \ldots S_l e(-z \log M)\, dz. \qquad (14)$$

Обозначим

$$\Phi(z) = DU S_1 S_2 \ldots S_l e(-z \log M),$$

$$H_M = \int_0^\zeta \Phi(z)\, dz, \quad \zeta = A^{-1} e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}},$$

$$H_1 = \int_\zeta^Y \Phi(z)\, dz, \quad Y = e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_3}},$$

$$H_2 = \int_Y^\infty \Phi(z)\, dz.$$

Тогда находим

$$|I_{M,l} - H_M| \leqslant |H_1| + |H_2| + |R|. \qquad (15)$$

§ 5. Займемся теперь оценкой интегралов правой части (15). Для оценки H_1 рассмотрим сперва те значения z из интервала $\zeta \leqslant z \leqslant Y$, для которых

$$(z \log p_1) > \zeta.$$

Совокупность таких значений z обозначим через E', а совокупность всех остальных значений z того же интервала через E''. Если, кроме того, обозначим

$$H_1' = \int_{(E')} \Phi(z)\, dz, \quad H_1'' = \int_{(E'')} \Phi(z)\, dz,$$

то

$$H_1 = H_1' + H_1''. \qquad (16)$$

Для любого значения z из E' имеем по лемме 6

$$|S_1| \leqslant \frac{1}{2(z \log p_1)} \leqslant \frac{1}{2\zeta} \ll Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}.$$

Поэтому

$$H_1' \ll DAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}} \int_{(E')} |U|\,|S_2| \ldots |S_l|\, dz.$$

§ 6. Легко проверить, что

$$U \ll \frac{\Delta}{D},$$

и что область E' мы можем заменить всем промежутком от 0 до Y. Поэтому находим

$$H_1' \ll \Delta Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}} \int_0^Y |S_2|\,|S_3| \ldots |S_l|\, dz. \qquad (17)$$

К интегралу правой части последнего соотношения применяем последовательно неравенство Коши-Шварца и получаем

$$\int_0^Y |S_2|\,|S_3| \ldots |S_l|\, dz \leqslant \left(\int_0^Y |S_2|^2 dz \int_0^Y (|S_3|\,|S_4| \ldots |S_l|)^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^Y |S_2|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^Y |S_3|^4 dz \int_0^Y (|S_4| \ldots |S_l|)^4 dz\right)^{\frac{1}{4}}.$$

После $(l-2)$-кратного применения неравенства Коши-Шварца находим

$$\int_0^Y |S_2|\,|S_3| \ldots |S_l|\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^Y |S_2|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^Y |S_3|^4 dz\right)^{\frac{1}{4}} \ldots \left(\int_0^Y |S_{l-1}|^{2^{l-2}} dz\right)^{\frac{1}{2^{l-2}}} \left(\int_0^Y |S_l|^{2^{l-2}} dz\right)^{\frac{1}{2^{l-2}}} \quad (18)$$

Рассмотрим один из сомножителей правой части последнего неравенства. Имеем

$$\int_0^Y |S_\lambda|^{2^{\lambda-1}} dz = \int_0^Y \Bigl|\sum_{\alpha_\lambda \leqslant A} e\,(z\alpha_\lambda \log p_\lambda)\Bigr|^{2^{\lambda-1}} dz, \qquad \lambda = 2, 3, \ldots, l-1.$$

Введем подстановку $z \log p_\lambda = w$ и найдем

$$\int_0^Y |S_\lambda|^{2^{\lambda-1}} dz \leqslant \frac{1}{\log p_\lambda} \int_0^L \Bigl|\sum_{\alpha_\lambda \leqslant A} e\,(w\alpha_\lambda)\Bigr|^{2^{\lambda-1}} dw,$$

где

$$L = [Y \log p_\lambda] + 1.$$

Последнее неравенство мы можем переписать следующим образом:

$$\int_0^Y |S_\lambda|^{2^{\lambda-1}} dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\log p_\lambda} \int_0^L \sum_{\alpha', \ldots, \alpha^{(2^{\lambda-1})} \leqslant A} e\,(w\,(\alpha' + \ldots + \alpha^{(2^{\lambda-2})} - \alpha^{(2^{\lambda-2}+1)} - \ldots - \alpha^{(2^{\lambda-1})}))\, dw.$$

Но согласно лемме 7 интеграл правой части последнего неравенства равен числу L, умноженному на число решений неопределенного уравнения

$$\alpha' + \ldots + \alpha^{(2^{\lambda-2})} = \alpha^{(2^{\lambda-2}+1)} + \ldots + \alpha^{(2^{\lambda-1})}$$

в целых $\alpha', \ldots, \alpha^{(2^{\lambda-1})}$, не превосходящих A, и потому, как нетрудно проверить,

$$\int_0^Y |S_\lambda|^{2^{\lambda-1}} dz \ll Y A^{2^{\lambda-1}-1}, \quad \lambda = 2, 3, \ldots, l-1.$$

Отдельно оцениваем таким же точно способом последний множитель правой части (18) и находим

$$\int_0^Y |S_l|^{2^{l-2}} dz \ll Y A^{2^{l-2}-1}.$$

С помощью найденных оценок мы можем заменить неравенство (18) следующим

$$\int_0^Y S_2 \quad S_3 \ \dots \ S_l \ dz \ll Y^{\sum\limits_{\lambda=2}^{l-1}\frac{1}{2^{\lambda-1}}+\frac{1}{2^{l-2}}} A^{\sum\limits_{\lambda=2}^{l-1}\frac{2^{\lambda-1}-1}{2^{\lambda-1}}+\frac{2^{l-2}-1}{2^{l-2}}} = YA^{l-2}.$$

Воспользовавшись последним неравенством, мы находим из (17)

$$H_1' \ll \Delta A e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}} Y A^{l-2},$$

или

$$H_1' \ll A^{l+1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \qquad (19)$$

§ 7. Переходим теперь к оценке интеграла H_1''. Каждое значение z из E'' мы можем представить следующим образом:

$$z \log p_1 = m + \frac{\theta_1 e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}}{A}, \quad |\theta_1| < 1, \qquad (20)$$

где m — целое число, отличное от нуля, причем

$$m \ll Y.$$

Полагаем

$$\tau = Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}}$$

и на основании леммы 4 находим

$$\frac{\log p_2}{\log p_1} = \frac{r}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (r, q) = 1, \quad 0 < |\theta| < 1, \qquad (21)$$

где

$$e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_5}} \ll q \ll Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}}. \qquad (22)$$

Умножая почленно равенства (20) и (21), получаем

$$z \log p_2 = \frac{mr}{q} + \frac{\theta_1 r e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}}{qA} + \frac{m\theta + \dfrac{\theta\theta_1 e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}}{A}}{q\tau}. \qquad (23)$$

Так как

$$\frac{q}{m} \gg e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_6}},$$

то $\frac{mr}{q}$ не может быть равно целому числу и отличается от ближайшего целого не меньше чем на $\frac{1}{q}$. Поэтому из равенства (23) выводим

$$(z \log p_2) \geq \frac{1}{q} + \frac{g e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}}}{A e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_6}}},$$

где g по абсолютной величине не превосходит постоянного числа. Следовательно, с помощью соотношения (22) мы выводим из последнего неравенства

$$(z \log p_2) \gg A^{-1} e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}}.$$

Теперь мы можем оценить сумму S_2 для всех значений z из E'' при помощи леммы 6; находим

$$S_2 \ll A\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}},$$

поэтому

$$H_1'' \ll A\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}} \int\limits_{(E'')} |U|\,|S_1|\,|S_3|\ldots|S_l|\,dz.$$

Последний интеграл мы оцениваем теперь по способу, изложенному выше (§ 6), и находим

$$H_1'' \ll A^{l-1}\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \tag{24}$$

Из (16), (19) и (24) окончательно получаем

$$H_1 \ll A^{l-1}\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \tag{25}$$

§ 8. При оценке H_2 мы для каждой из сумм $S_1, S_2, \ldots, S_l$ применяем очевидную оценку

$$|S_\lambda| \leqslant A \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l); \tag{26}$$

кроме того замечаем, что

$$|\sin 2\pi\Delta z \sin^s 2\pi\delta z| \leqslant 1. \tag{27}$$

С помощью (26) и (27) находим

$$H_2 \ll DA^l\, \delta^{-s} \int\limits_Y^\infty z^{-s-1}\,dz = DA^l\,\delta^{-s}\,Y^{-s},$$

или, подставив сюда значения D, δ, s и Y, получаем

$$H_2 \ll A^{l-1}\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \tag{28}$$

Воспользовавшись оценками (25) и (28), из (15) находим

$$I_{M,l} - H_M \ll A^{l-1}\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}} + |R|. \tag{29}$$

§ 9. Для оценки R заметим, что R по абсолютной величине не превосходит погрешности, получаемой при замене в интеграле правой части (14) Δ через $\Delta - 2s\delta$. Мы оценим прежде всего погрешность от такой замены в интеграле H_M. При этом без труда находим

$$|H_M(\Delta) - H_M(\Delta - 2s\delta)| <$$

$$< D\int\limits_0^{\tau} \frac{|2\cos 2\pi(\Delta - 2s\delta)z \sin 2\pi s\delta z \sin^s 2\pi\delta z|}{\delta^s z^{s+1}}\,|S_1|\ldots|S_l|\,dz,$$

откуда

$$H_M(\Delta) - H_M(\Delta - 2s\delta) \ll s\delta \int\limits_0^1 |S_1|\ldots|S_l|\,dz.$$

Применяя к последнему интегралу рассуждения, аналогичные изложенным в § 6, и подставив значения s и δ из (11), найдем

$$H_M(\Delta) - H_M(\Delta - 2s\delta) \ll A^{l-1}\, e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}$$

При помощи последнего соотношения и оценок (25) и (28) получаем

$$R \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}.$$

Поэтому из (29) находим

$$I_{M,l} - H_M \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}; \qquad (30)$$

в частности при $M = N$ получаем

$$I_{N,l} - H_N \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \qquad (31)$$

§ 10. В соотношении (30) мы можем заменить H_M через H_N. В самом деле, из определения (13) следует, что

$$\log M = A + \theta A\eta \quad (|\theta| \leqslant 1).$$

Поэтому мы имеем

$$|H_M - H_N| \leqslant D \int_0^{\zeta} |U| |S_1| \ldots |S_l| |1 - e^{2\pi i z \theta A\eta}| \, dz,$$

или

$$H_M - H_N \ll \Delta\zeta A\eta \int_0^1 |S_1| \ldots |S_l| \, dz.$$

К последнему интегралу мы опять применяем рассуждения, изложенные в § 6, и получаем

$$H_M - H_N \ll \Delta\zeta A\eta A^{l-1},$$

откуда окончательно находим

$$H_M - H_N \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \qquad (32)$$

Из (30) и (32) получаем

$$I_{M,l} - H_N \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \qquad (33)$$

Для вычисления H_N мы суммируем последнее соотношение по всем числам M, определенным соотношениями (13), и находим

$$\sum_M I_{M,l} - VH_N \ll VA^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}, \qquad (34)$$

где V означает число чисел M. Из (13) легко находим

$$V = \frac{A\eta}{\Delta_1} + O(1). \qquad (35)$$

Сумма $\sum\limits_M I_{M,l}$ выражает число целых точек в области

$$A(1-\eta) \leqslant \alpha_1 \log p_1 + \ldots + \alpha_l \log p_l \leqslant A(1+\eta).$$

Применяя поэтому лемму 8, получаем

$$\sum_M I_{M,l} = \frac{A^l}{l! \log p_1 \ldots \log p_l} [(1+\eta)^l - (1-\eta)^l] + O(A^{l-1}) =$$

$$= \frac{2A^l\eta}{(l-1)! \log p_1 \ldots \log p_l} + O(A^l\eta^2).$$

Подставляя это значение в (34), находим

$$\frac{2A^l\eta}{(l-1)!\log p_1\ldots\log p_l}-VH_N\ll VA^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}+A^l\eta^2,$$

или

$$H_N-\frac{2}{(l-1)!\log p_1\ldots\log p_l}\frac{A^l\eta}{V}\ll A^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}+\frac{A^l\eta^2}{V}.$$

Подставляя сюда значение V из (35), находим

$$H_N-\frac{2A^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1\ldots\log p_l}\ll A^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}+A^{l-1}\Delta_1\eta$$

или

$$H_N-\frac{2A^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1\ldots\log p_l}\ll A^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \qquad (36)$$

Из последнего соотношения и (31) получаем

$$I_{N,l}-\frac{2A^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1\ldots\log p_l}\ll A^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}.$$

Таким образом теорема 2 доказана.

§ 11. Приступаем теперь к доказательству теоремы 3. Мы попрежнему будем пользоваться обозначениями

$$A=\log N,\qquad a=\log A$$

и введем числа $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{14}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\varepsilon=\varepsilon_0>\varepsilon_1>\ldots>\varepsilon_{14}.$$

Для числа представлений $J_{N,l}$ мы, так же как и выше (§ 4), находим соотношение

$$J_{N,l}+R=D\int_0^\infty US_1S_2\ldots S_le(-zA)\,dz, \qquad (37)$$

где

$$S_\lambda=\sum_{\pi_\lambda\le A}e(z\pi_\lambda\log p_\lambda)\qquad(\lambda=1,2,\ldots,l),$$

$$D=\frac{1}{2^{\varkappa+1}\pi^{\varkappa+1}},\qquad U=\frac{\sin 2\pi\Delta z\,\sin^{\varkappa}2\pi\delta z}{\delta^{\varkappa}z^{\varkappa+1}},$$

$$\Delta=\Delta_1+s\delta,\qquad \delta=e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_1}},\qquad s=a^{\frac{2}{3}+\varepsilon_2}.$$

а R имеет такое же значение, что и в § 4.

Обозначим

$$\Phi(z)=DUS_1S_2\ldots S_le(-zA),$$

$$H_0=\int_0^\zeta\Phi(z)\,dz,\qquad \zeta=A^{-1}e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}},$$

$$H_1=\int_\zeta^Y\Phi(z)\,dz,\qquad Y=e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_3}},$$

$$H_2=\int_Y^\infty\Phi(z)\,dz.$$

Тогда находим

$$|J_{N,l}-H_{N,l}|\leqslant|H_1|+|H_2|+|R|. \qquad (38)$$

§ 12. Переходим к оценке интегралов правой части (38). Для оценки H_1 заметим, что для каждого значения z, удовлетворяющего условию

$$\zeta \leqslant z \leqslant Y,$$

имеем

$$z\log p_1=\frac{r_1}{q_1}+\frac{\theta_1}{q_1\tau_1},\quad (r_1,\,q_1)=1,\quad q_1\leqslant\tau_1,\quad |\theta_1|\leqslant 1, \qquad (39)$$

$$\tau_1=Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}}.$$

Рассмотрим сперва те значения z, для которых соответствующие значения q_1 удовлетворяют условию

$$q_1\leqslant e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_5}}.$$

Для таких значений z мы получаем с помощью леммы 1 следующую оценку (полагаем $k=1$):

$$S_1\ll Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}.$$

Обозначая часть интеграла H_1, соответствующую этим значениям z, через H_1', имеем

$$H_1'\ll DAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}\int\limits_{(E')}|U||S_2|\ldots|S_l|\,dz,$$

причем область интегрирования E' состоит из указанных значений z. Далее мы замечаем, что

$$U\ll\frac{\Delta}{D}$$

и что область E' мы можем заменить всем промежутком от 0 до Y. Поэтому находим

$$H_1'\ll\Delta Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}\int\limits_0^Y|S_2\,S_3|\ldots|S_l|\,dz.$$

Последний интеграл мы оцениваем по способу, изложенному в § 6, и находим

$$H_1'\ll\Delta Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}YA^{l-2},$$

или

$$H_1'\ll A^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \qquad (40)$$

§ 13. Переходим теперь к оценке части интеграла H_1, оставшейся после выделения H_1'. Эту часть мы обозначим через H_1'', а совокупность соответствующих значений z—через E''. Имеем согласно лемме 4

$$\frac{\log p_2}{\log p_1}=\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q\tau},\quad (r,\,q)=1,\quad q\leqslant\tau,\quad 0<|\theta|<1, \qquad (41)$$

где

$$\tau=A^{\frac{1}{2}}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_6}},\qquad q\gg e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{11}}}.$$

К E'' будут принадлежать все значения z, которые согласно (39) могут быть представлены в виде

$$z \log p_1 = \frac{r_1}{q_1} + \frac{\theta_1}{q_1\tau_1}, \quad (r_1, q_1) = 1, \quad q_1 \leq \tau_1, \quad |\theta_1| \leq 1,$$

причем

$$r_1 \geq 1, \quad q_1 \leq e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_7}}, \quad \frac{r_1}{q_1} \ll Y.$$

Воспользовавшись равенством (41), мы можем каждое значение z из E'' представить в виде

$$z \log p_2 = z \log p_1 \cdot \frac{\log p_2}{\log p_1} = \frac{rr_1}{qq_1} + \frac{r\theta_1}{qq_1\tau_1} + \frac{r_1\theta + \frac{\theta\theta_1}{\tau_1}}{qq_1\tau},$$

или

$$z \log p_2 = \frac{rr_1}{qq_1} + \frac{g}{\tau_1} + \frac{(r_1 q_1 + 1)\,\theta_2}{qq_1^2\tau}, \tag{42}$$

где g по абсолютной величине не превосходит некоторое постоянное, а $|\theta_2| \leq 1$. Заметим, что так как

$$\frac{r_1}{q_1} \ll Y,$$

то

$$r_1 \ll Yq_1, \quad r_1 \ll e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_8}}, \quad r_1 q_1 \ll e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_9}},$$

откуда

$$\frac{q}{r_1} \gg e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{10}}};$$

кроме того имеем

$$\tau_1 \gg (qq_1)^3.$$

Поэтому из (42) получаем

$$z \log p_2 = \frac{r_2}{q_2} + \frac{\theta_3 k}{q_2^2}, \quad (r_2, q_2) = 1, \quad |\theta_3| \leq 1,$$

где

$$A^{\frac{1}{2}} e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{12}}} \gg q_2 \gg e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{10}}}, \quad k \ll e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_9}}.$$

Мы можем поэтому оценить S_2 для значений z из E'' при помощи леммы 1. Находим

$$S_2 \ll Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{13}}}.$$

С помощью этой оценки получаем

$$H_1'' \ll DAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{13}}} \int\limits_{(E'')} |U|\,|S_1|\,|S_3| \ldots |S_l|\,dz.$$

Рассуждая теперь так же, как и выше при оценке H_1' (§ 6), мы окончательно находим

$$H_1'' \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_4}}.$$

Из последнего соотношения и из (40) получаем

$$H_1 \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_6}}. \tag{43}$$

Интеграл H_2 и величину R мы можем оценить так же, как это изложено в §§ 8 и 9. Воспользовавшись найденными таким образом оценками и (43), мы находим из (38)

$$J_{N,l}-H_N \ll A^{l-1}e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \tag{44}$$

§ 14. Займемся теперь вычислением интеграла H_N. С этой целью мы разобьем сумму S_λ ($\lambda=1, \ldots, l$) на $e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}$ частичных сумм вида

$$S_{\lambda,W}=\sum_{W<\pi_\lambda\leqslant W_1} e(z\pi_\lambda \log p_\lambda),$$

где

$$0<W_1-W\leqslant Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}.$$

Имеем

$$z\pi_\lambda=zW+O\left(zAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}\right),$$

и для значений z, удовлетворяющих условию $0\leqslant z\leqslant \zeta$, находим

$$e(z\pi_\lambda \log p_\lambda)=e(zW\log p_\lambda)+O\left(zAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}\right).$$

Но для числа простых чисел π_λ, заключенных в пределах от W до W_1, как известно, имеем

$$I_W=\pi(W_1)-\pi(W)=\sum_{W<x\leqslant W_1}\frac{1}{\log x}+O\left(Ae^{-a^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Поэтому

$$S_{\lambda,W}=e(zW\log p_\lambda)\sum_{W<x\leqslant W_1}\frac{1}{\log x}+O\left(I_W zAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}+Ae^{-a^{\frac{1}{2}}}\right)$$

или

$$S_{\lambda,W}=\sum_{W\leqslant x\leqslant W_1}\frac{e(zx\log p_\lambda)}{\log x}+O\left(I_W zAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}+Ae^{-a^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Суммируя эту формулу для всех значений W, находим

$$S_\lambda=I_\lambda+O\left(\frac{A}{a}zAe^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}+e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_{14}}}Ae^{-a^{\frac{1}{2}}}\right),$$

или

$$S_\lambda=I_\lambda+O\left(Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}\right), \tag{45}$$

где

$$I_\lambda=\sum_{2\leqslant x\leqslant A}\frac{e(zx\log p_\lambda)}{\log x}.$$

Нетрудно проверить при помощи неравенства Абеля и леммы 6, что

$$I_\lambda \ll Z, \quad Z=\begin{cases}\dfrac{A}{a} & \text{при} \quad 0<z<\dfrac{1}{A},\\[2mm] \dfrac{1}{za} & \text{при} \quad \dfrac{1}{a}\leqslant z\leqslant\zeta.\end{cases} \tag{46}$$

Воспользовавшись значением (45) для S_λ, мы находим

$$H_N = D\int_0^{\zeta} U I_1 I_2 \ldots I_l e(-zA)\,dz + O(L), \tag{47}$$

где

$$L = D\int_0^{\zeta} |U| Z^{l-1} A e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}} dz \ll$$

$$\ll \Delta A e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}} \left(\int_0^{\frac{1}{A}} \frac{A^{l-1}}{a^{l-1}} dz + \int_{\frac{1}{A}}^{\zeta} \frac{1}{(za)^{l-1}} dz\right) \ll$$

$$\ll \Delta A e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}} \left(\frac{A^{l-2}}{a^{l-1}} + \frac{A^{l-2}}{a^{l-1}}\right),$$

или

$$L \ll A^{l-1} e^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}. \tag{48}$$

Обозначим

$$\Omega_\lambda = \sum_{2 \leqslant x \leqslant A} e(zx \log p_\lambda) \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ l).$$

Тогда

$$\left| I_\lambda - \frac{1}{a}\Omega_\lambda \right| \leqslant \left| \sum_{2 \leqslant x \leqslant \frac{A}{a}} \frac{e(zx \log p_\lambda)}{\log x} \right| +$$

$$+ \frac{1}{a}\left| \sum_{2 \leqslant x \leqslant \frac{A}{a}} e(zx \log p_\lambda) \right| + \left| \sum_{\frac{A}{a} < x \leqslant A} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{a}\right) e(zx \log p_\lambda) \right|,$$

или

$$I_\lambda - \frac{1}{a}\Omega_\lambda \ll \frac{A}{a^2} + \frac{A}{a^2} + \frac{A \log a}{a^2},$$

откуда находим

$$I_\lambda = \frac{1}{a}\Omega_\lambda + O\left(\frac{A \log a}{a^2}\right). \tag{49}$$

Кроме того без труда находим

$$\Omega_\lambda \ll aZ,$$

где Z определено равенствами (46). Подставляя значение (49) I_λ в (47), находим

$$H_N = \frac{D}{a^l} \int_0^{\zeta} U \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_l\, e(-zA) + O(L_1), \tag{50}$$

где

$$L_1 = D\int_0^{\zeta} |U| \frac{A \log a}{a^2} Z^{l-1} dz + L \ll$$

$$\ll \Delta \frac{A \log a}{a^2} \frac{A^{l-2}}{a^{l-1}} + L,$$

или, если воспользоваться соотношением (48),

$$L_1 \ll \Delta \frac{A^{l-1}\log a}{a^{l+1}}.$$

Но выражение (50) для H_N отличается от значения H_N, введенного при доказательстве теоремы 2, лишь множителем $\frac{1}{a^l}$. Поэтому, воспользовавшись соотношением (36), находим

$$H_N = \frac{2A^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1 \ldots \log p_l a^l} + O\left(\frac{A^{l-1}\Delta_1 \log a}{a^{l+1}}\right).$$

Подставив это значение в (44), мы окончательно находим

$$J_{N,l} = \frac{2A^{l-1}\Delta_1}{(l-1)!\log p_1 \ldots \log p_l a^l} + O\left(\frac{A^{l-1}\Delta_1 \log a}{a^{l+1}}\right).$$

Таким образом теорема 3 доказана.

§ 15. Переходим к доказательству теоремы 4. Заметим, что I_N равно числу целых точек в области

$$N \leqslant p_1^x p_2^y \leqslant Ne^{\Delta}; \quad x > 0, \quad y > 0,$$

если считать лишь те целые точки, абсциссы которых равны простым числам. Эта область ограничена осями координат и прямыми

$$y = B + \frac{\Delta}{\log p_2} - \frac{B}{A}x,$$

$$y = B - \frac{B}{A}x,$$

где

$$A = \frac{\log N}{\log p_1}, \quad B = \frac{\log N}{\log p_2}. \qquad (51)$$

Положив поэтому

$$y_1 = B + \frac{\Delta}{\log p_2} - \frac{B}{A}p,$$

$$y_2 = B - \frac{B}{A}p,$$

найдем

$$I_N = \sum_{p \leqslant A}[y_1] - \sum_{p \leqslant A}[y_2] = \sum_{p \leqslant A} y_1 - \sum_{p \leqslant A}\{y_1\} - \sum_{p \leqslant A} y_2 + \sum_{p \leqslant A}\{y_2\},$$

где $[\xi]$ и $\{\xi\}$ означают соответственно целую часть и дробную часть числа ξ.

Из последнего равенства находим

$$I_N = \sum_{p \leqslant A}(y_1 - y_2) - \sum_{p \leqslant A}(\{y_1\} - \{y_2\}). \qquad (52)$$

Первую из этих сумм мы вычисляем непосредственно и находим

$$\sum_{p \leqslant A}(y_1 - y_2) = \frac{\Delta\pi(A)}{\log p_2}. \qquad (53)$$

Для вычисления второй из сумм правой части (52) заметим, что

$$\{y_1\} - \{y_2\} = \begin{cases} \dfrac{\Delta}{\log p_2}, & \text{если } \{y_2\} < 1 - \dfrac{\Delta}{\log p_2}, \\ -1 + O(\Delta), & \text{если } \{y_2\} > 1 - \dfrac{\Delta}{\log p_2}. \end{cases}$$

Поэтому, положив

$$\frac{B}{A}=\frac{\log p_1}{\log p_2}=\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q\tau}, \quad (r, q)=1, \quad q\leqslant\tau,$$

мы найдем по лемме 2

$$\sum_{p\leqslant A}(\{y_1\}-\{y_2\})=$$

$$=\frac{\Delta}{\log p_2}\left(\left(1-\frac{\Delta}{\log p_2}\right)\pi(A)+O(L)\right)+(-1+O(\Delta))\left(\frac{\Delta}{\log p_2}\pi(A)+O(L)\right),$$

где

$$L=Ae^{a^\varepsilon}\sqrt{A^{-\frac{1}{3}+h}+A^{-1+h}q^{1-h}+q^{-1+h}}. \tag{54}$$

Отсюда мы получаем

$$\sum_{p\leqslant A}(\{y_1\}-\{y_2\})=O(L+\Delta^2\pi(A)). \tag{55}$$

Полагая

$$\tau=Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_1}}, \quad a=\log A, \quad 0<\varepsilon_1<\varepsilon,$$

мы находим при помощи леммы 4

$$q\gg e^{a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}}, \quad \varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon.$$

Поэтому из (54) выводим

$$L\ll Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}, \quad \varepsilon_2<\varepsilon_0<\varepsilon,$$

и из (55) получаем

$$\sum_{p\leqslant A}(\{y_1\}-\{y_2\})=O\left(Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}+\Delta^2\pi(A)\right). \tag{56}$$

Подставляя значения (53) и (56) в (52), мы находим

$$I_N=\frac{\Delta\pi(A)}{\log p_2}+O\left(Ae^{-a^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}+\Delta^2\pi(A)\right).$$

Воспользовавшись известной асимптотической формулой для числа $\pi(A)$ простых чисел, не превосходящих A, и подставляя сюда значения (8) и (51) для Δ и A, мы получаем формулу (9). Таким образом теорема 4 доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР.

Поступило 31. VIII. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сегал Б. И., Приближение к числам с помощью произведения степеней двух простых чисел, Докл. Ак. Н. СССР, А, № 4 (1933), 39—44.

[2] Гельфонд А. О., О приближении алгебраическими числами отношения логарифмов двух алгебраических чисел, Изв. Ак. Н. СССР, серия матем., (1939), № 5—6, 509—518.

[3] Виноградов И. М., Оценки некоторых простейших тригонометрических сумм с простыми числами, Изв. Ак. Н. СССР, серия матем., (1939), № 4, 371—398.

[4] Сегал Б. И., Теорема Варинга для степеней с дробными и иррациональными показателями, Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. V, (1934), 73—86.

[5] Виноградов И. М., Новый метод в аналитической теории чисел, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. X (1937), 5—122.

B. SEGAL. ON INTEGERS OF STANDARD FORM OF A DEFINITE TYPE

SUMMARY

We say that a set of integers is produced by a system of primes $p_1, p_2, \ldots, p_l$, if the set contains all integers the standard form of which contains only the given primes $p_1, p_2, \ldots, p_l$. In an earlier paper (1) we considered sets of integers produced by a system of two primes and obtained the following

THEOREM 1. *Let p_1 and p_2 be two different primes, $N > 0$, and let I_N be the number of solutions of the equation*

$$N = d\, p_1^x p_2^y,$$

where x, y are integers and d satisfies the condition

$$1 \leqslant d \leqslant e^{\Delta}, \quad \Delta = \frac{\log \log \log N}{\log \log N}.$$

Then we have the asymptotical formula

$$I_N = \frac{\log N \log \log \log N}{\log p_1 \log p_2 \log \log N} + O\left(\frac{\log N}{\log \log N}\right).$$

Thus the ratio of any $N > 0$ to its next number of a set produced by a system of two primes tends to unity as N increases infinitely.

Theorem 1 may be essentially improved by application of a new result (2) in the theory of transcendental number due to A. Gelfond, and we can prove the same theorem with the following value of Δ:

$$\Delta = e^{-(\log \log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}},$$

where ε is positive.

In the present paper we consider sets of integers produced by a system of three or more primes and prove the following

THEOREM 2. *Let $p_1, p_2, \ldots, p_l$ be given primes, $l \geqslant 3$, $N > 0$, and let $I_{N,l}$ be the number of solutions of the equation*

$$N = d\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l},$$

where $\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ are integers and d satisfies the condition

$$e^{-\Delta} \leqslant d \leqslant e^{\Delta}, \quad \Delta = e^{-(\log \log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Then we have the asymptotical formula

$$I_{N,l} = \frac{2 (\log N)^{l-1} \Delta}{(l-1)!\, \log p_1 \ldots \log p_l} + O\left((\log N)^{l-1} e^{-(\log \log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}\right),$$

where $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$.

The problem becomes much more complicated, if we consider sets of integers produced by a given system of primes with the additional condition that the exponents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ run over integers satisfying some conditions. Here we consider sets of integers with the additional condition that the exponents run over primes, i. e., we consider the numbers of the form

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_l^{\pi_l},$$

where $p_1, p_2, \ldots, p_l$ are given primes and $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ run over primes. By use of the new estimations (3) of trigonometrical sums involving primes due to I. Vinogradow and of the mentioned result due to A. Gelfond we prove the following

THEOREM 3. *Let $p_1, p_2, \ldots, p_l$ be given primes, $l \geq 3$, $N > 0$, and let $J_{N,l}$ denote the number of solutions of the equation*

$$N = d p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_l^{\pi_l},$$

where $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ are primes and d satisfies the condition

$$e^{-\Delta} \leq d \leq e^{\Delta}, \quad \Delta = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0;$$

then we have the asymptotical formula

$$J_{N,l} = \frac{2(\log N)^{l-1}\Delta}{(l-1)!\log p_1 \ldots \log p_l (\log\log N)^l}\left(1 + O\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)\right).$$

Thus for every $N > 0$ an integer n of the form

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} p_3^{\pi_3}$$

can be chosen such that the ratio $\frac{N}{n}$ tends to unity as N increases infinitely. As an addition to Theorem 3 we prove also the following

THEOREM 4. *Let p_1 and p_2 be two given primes, $N > 0$, let I_N^* denote the number of solutions of the equation*

$$N = d p_1^p p_2^y,$$

where p runs over primes, y runs over positive integers and α satisfies the conditions

$$1 \leq d \leq e^{\Delta}, \quad \Delta = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0;$$

then we have the asymptotical formula

$$I_N = \frac{e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}}{\log p_2} \int_2^{\frac{\log N}{\log p_1}} \frac{du}{\log u} + O\left(\log N e^{-2(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\right).$$

After Theorem 3 and Theorem 4 are proved, it remains only to solve the problem of the approximation of positive numbers by integers of the form

$$p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2},$$

where p_1, p_2 are given primes and π_1, π_2 run over primes.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. А. ЛЯПУНОВ

О КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ДЛЯ (*A*)-ОПЕРАЦИИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В разделе I устанавливаются первая и вторая теоремы о кратной отделимости по отношению к (*A*)-операции для некоторых систем множеств весьма общей природы. В разделе II устанавливается соответствующая теорема неотделимости для некоторых систем множеств, лежащих в бэровском пространстве.

Введение

Как известно, для *A*-множеств имеют место первая и вторая теоремы отделимости [(1), гл. III]:

ТЕОРЕМА 1. *Два A-множества без общих точек отделимы B-множествами.*

ТЕОРЕМА 2. *Если у двух A-множеств удалить их общую часть, то остатки отделимы CA-множествами.*

Обе эти теоремы установлены Н. Н. Лузиным и были неоднократно обобщены. В первую очередь здесь следует упомянуть работы П. С. Новикова (2, 3, 4, 5, 6, 7), который впервые ввел понятие кратной отделимости и установил ряд случаев, в которых она имеет место. Впоследствии ряд теорем кратной отделимости был установлен Н. Н. Лузиным (8), В. К. Серпинским (9), С. Ружевичем (10), З. И. Козловой (11) и мной (12, 13). Теоремы о кратной отделимости имеют следующий вид.

Рассматривается конечная или счетная система множеств

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots, \tag{1}$$

принадлежащих к некоторому классу K, и одна из теоретико-множественных операций Π (в конечном или счетном числе), $\underline{\lim}$ или $\overline{\lim}$, и доказываются утверждения следующего типа:

если результат соответствующей операции над множествами системы (1) *пуст, то эти множества можно заключить в некоторые множества максимального тела класса K, так что результат той же операции над ними будет пуст* (теорема 1);

в случае если результат операции над множествами системы (1) *не пуст, то, удалив его из каждого из множеств системы* (1), *получим такие множества, которые могут быть заключены в множества дополнительного класса CK так, что результат той же операции над этими последними будет пуст* (теорема 2).

В большинстве цитированных работ классом K является совокупность A-множеств или совокупность элементов класса α.

С другой стороны, П. С. Новиков показал (7), что аналогичные теоремы имеют место в семействе проективных множеств второго класса (где за класс K следует взять класс CA_2-множеств), а также в некоторых системах множеств, инвариантных по отношению к (A)-операции, например в системе C множеств класса α (5, 6). Мы напомним некоторые определения, принадлежащие Н. Н. Лузину, несколько обобщая их.

Пусть R есть множество всех рациональных чисел интервала $[0, 1]$, упорядоченных по величине. Пусть X есть произвольное абстрактное множество. Рассмотрим множество $X \times R$. Подмножества этого множества мы будем называть **решетами**. Пусть x_0 есть элемент множества X (далее мы будем говорить также — точка множества X) и C — некоторое решето. Через P_{x_0} мы обозначим множество всех точек вида (x_0, r). Будем считать, что P_{x_0} также упорядочено по величине чисел r, и что решето C определяет множество E $(E \subset X)$, если E есть совокупность всех таких точек x_0, для которых $P_{x_0} \cdot C$ не вполне упорядочено в направлении возрастания чисел r.

Если $x_0 \subset E$, то мы будем говорить, что индекс решета C в точке x_0 равен Ω,

$$\mathrm{Ind}_{x_0} C = \Omega.$$

Если же $x_0 \subset CE$, то $P_{x_0} \cdot C$ вполне упорядочено в направлении возрастания r. Пусть β есть порядковый тип множества $P_{x_0} \cdot C$. Будем называть число β индексом решета C в точке x_0,

$$\mathrm{Ind}_{x_0} C = \beta.$$

Множество C распадается на счетное число частей, для каждой из которых $r = \mathrm{const}$. Эти части мы будем называть **элементами решета**. Иногда мы будем также называть элементами решета **проекции** этих частей на X. Все определения, относящиеся к решету, в точности повторяют то, что давно известно для эвклидова или бэровского пространства [(1), гл. III].

Напомним некоторые определения и результаты П. С. Новикова, также несколько их обобщая; они понадобятся нам в дальнейшем.

Если e_1 и e_2 суть два упорядоченных множества, то мы скажем, что e_1 **отражается** подобно на e_2, если e_2 имеет часть, подобную множеству e_1.

Пусть M есть некоторое тело * множеств, принадлежащих некоторому исходному абстрактному множеству X. Обозначим через $A(M)$ класс множеств, получаемых в результате применения (A)-операции к множествам тела M. Обозначим через $B(M)$ максимальное тело, содержащееся в системе $A(M)$. Легко видеть, что $B(M)$ есть совокупность всех множеств системы $A(M)$, дополнения к которым (относи-

* Под телом мы понимаем систему множеств, инвариантную по отношению к операциям: конечная сумма, конечное пересечение и дополнение [(14), гл. V]; мы рассматриваем лишь тела, содержащие множество X.

тельно X) входят в $A(M)$. Дополнительную систему к $A(M)$ мы обозначим через $CA(M)$.

Совершенно так же, как в случае плоскости, можно показать, что (A)-операция всегда эквивалентна некоторому решету с теми же элементами (в смысле проекций на X) и наоборот.

Пусть теперь K есть некоторое кольцо * подмножеств множества X и M максимальное тело, заключенное в кольце K. (В частности, K может совпадать с M.) Основной результат П. С. Новикова, относящийся к системе такого типа, состоит в следующем **:

Принцип отражения [5, 6]. *Пусть C_1 и C_2 два решета, причем все элементы решета C_1 входят в M, а все элементы решета C_2 входят в K. Тогда множество точек x, для которых $P_x \cdot C_1$ отражается подобно на $P_x \cdot C_2$, входит в класс $A(K)$.*

Решето C называется правильным, если из того, что $P_x \cdot C$ не вполне упорядочено, следует, что R отражается подобно на $P_x \cdot C$. П. С. Новиков показал, что для всякого решета можно построить эквивалентное ему (т. е. определяющее то же самое множество) правильное решето, причем совокупность его элементов, как подмножеств множества X, совпадает с той же совокупностью для прежнего решета. Поэтому из принципа отражения следует утверждение:

Если C_1 и C_2 суть правильные решета и элементы решета C_1 входят в M, а решета C_2 в K, то множество тех точек x, где выполнено неравенство

$$\mathrm{Ind}_x C_1 \leqslant \mathrm{Ind}_x C_2,$$

входит в класс $A(K)$.

Рассматривая случай, когда $K = M$, П. С. Новиков получил следующие теоремы:

Первая теорема отделимости. *Два непересекающихся множества класса $A(M)$ всегда отделимы множествами класса $B(M)$.*

Вторая теорема отделимости. *Если у двух множеств класса $A(M)$ удалить их общую часть, остатки отделимы множествами класса $B(M)$.*

П. С. Новиковым доказаны также две аналогичные теоремы для случая счетного пересечения и кратной отделимости.

I. Теоремы отделимости

В настоящей работе мы имеем в виду, опираясь на принцип отражения, доказать две теоремы для случая (A)-операции, аналогичные цитированным выше.

* Кольцом называется система множеств, инвариантная к конечным суммам и пересечениям [(14), гл. V].

** Первоначально принцип отражения был получен П. С. Новиковым в 1926 г. для случая (B)-решет. Опубликован он был лишь позднее (15). Видоизмененное доказательство его (с некоторыми погрешностями) изложено в книге Н. Н. Лузина [(1), гл. III].

Мы будем обозначать

$$A(\{E_{n_1n_2\ldots n_k}\})=\sum_{n_1n_2\ldots n_k\ldots}\prod_k E_{n_1n_2\ldots n_k}.$$

ТЕОРЕМА I. *Если* $\{E_{n_1n_2\ldots n_k}\}$ *есть система множеств класса* $A(M)$ *и*

$$A(\{E_{n_1n_2\ldots n_k}\})=0,$$

то существует система множеств $\{H_{n_1n_2\ldots n_k}\}$ *класса* $B(M)$ *такая, что*

$$A(\{H_{n_1n_2\ldots n_k}\})=0$$

и

$$H_{n_1n_2\ldots n_k}\supset E_{n_1n_2\ldots n_k},$$

каковы бы ни были числа $k,\ n_1,n_2,\ldots,n_k$.

ТЕОРЕМА II. *Для всякой системы множеств* $\{E_{n_1n_2\ldots n_k}\}$ *класса* $A(M)$ *существует система множеств* $\{H_{n_1n_2\ldots n_k}\}$ *класса* $CA(M)$ *такая, что*

$$A(\{H_{n_1n_2\ldots n_k}\})=0$$

и

$$H_{n_1n_2\ldots n_k}\supset E_{n_1n_2\ldots n_k}-A(\{E_{n_1n_2\ldots n_k}\})$$

каковы бы ни были числа $k,\ n_1,n_2,\ldots,n_k$.

Мы начнем с доказательства теоремы II.

Пусть $\{\beta_{n_1n_2\ldots n_k}(x)\}$ есть система трансфинитных функций, занумерованных целочисленными кортежами и не превосходящих Ω. Аргумент x есть попрежнему элемент множества X. Через $E_{n_1n_2\ldots n_k}$ мы обозначим множество всех тех точек x, в которых

$$\beta_{n_1n_2\ldots n_k}(x)=\Omega.$$

Через $Q^{n_1n_2\ldots n_k}_{m_1m_2\ldots m_j}$ обозначим множество тех точек x, где

$$\beta_{n_1n_2\ldots n_k}(x)\leqslant\beta_{m_1m_2\ldots m_j}(x)$$

и рассмотрим совокупность всех множеств $\{Q^{n_1n_2\ldots n_k}_{m_1m_2\ldots m_j}\}$, у которых либо верхний кортеж есть продолжение нижнего, либо нижний продолжение верхнего. (Если у двух кортежей один есть продолжение другого, то мы будем говорить, что они сравнимы.)

Теперь для всякого кортежа

$$n_1,n_2,\ldots,n_k$$

определим систему множеств

$$\{N^{n_1n_2\ldots n_k}_{m_1m_2\ldots m_j}\}$$

следующим образом: если кортежи $m_1,m_2,\ldots,m_j$ и $n_1,n_2,\ldots,n_k$ сравнимы между собой, то

$$N^{n_1n_2\ldots n_k}_{m_1m_2\ldots m_j}=Q^{n_1n_2\ldots n_k}_{m_1m_2\ldots m_j}.$$

Во всех остальных случаях

$$N^{n_1n_2\ldots n_k}_{m_1m_2\ldots m_j}=0.$$

Пусть

$$n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots \tag{2}$$

есть некоторая последовательность целых чисел. Мы будем говорить, что множество

$$E_{n_1n_2\ldots n_k}$$

или функция $\beta_{n_1n_2\ldots n_k}(x)$ принадлежит к последовательности (2), если его кортеж есть сегмент этой последовательности. Если в точке x_0

функция $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$, принадлежащая к (2), имеет значение, не превосходящее значений в той же точке любой другой функции системы $\{\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)\}$, принадлежащей к (2), то мы будем говорить, что в точке x_0 $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ реализует минимум для (2). Если ни для одной последовательности вида (2) функция $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ не реализует минимума в точке x_0, то мы скажем, что функция $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ в точке x_0 никогда не реализует минимума.

Множество точек, в которых $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ никогда не реализует минимума, обозначим через

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

Далее, обозначим

$$A(\{V^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j}\}) = \sum_{m_1 m_2 \ldots m_j \ldots} \prod_j V^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j},$$

т. е. всегда будем предполагать, что (A)-операция берется по нижним индексам.

ЛЕММА I. *Всегда имеем*

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} = CA(\{N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j}\}).$$

Обозначения имеют тот же смысл, что выше.

Доказательство. Докажем эквивалентное равенство

$$CH_{n_1 n_2 \ldots n_k} = A(\{N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j}\}).$$

В самом деле, из определения множеств $N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j}$ следует, что если

$$x \subset A(\{N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j}\}),$$

то найдется такая последовательность

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_{k+l}, \ldots, \tag{3}$$

что

$$x \subset N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j},$$

если только нижний кортеж есть сегмент последовательности (3). Но это означает, что

$$x \subset Q^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j}.$$

или что при всяком j

$$\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x) \leqslant \beta_{n_1 n_2 \ldots n_j}(x),$$

т. е. в точке x функция $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ реализует минимум относительно (3), а так как $H_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ есть множество тех точек x, в которых $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ никогда не реализует минимум, то

$$x \subset CH_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

и следовательно

$$A(\{N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{m_1 m_2 \ldots m_j}\}) \subset CH_{n_1 n_2 \ldots n_k}. \tag{4}$$

Пусть теперь $x \subset CH_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Это означает, что существует такая последовательность

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_{k+l}, \ldots, \tag{5}$$

сегментом которой является кортеж $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и для которой $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ реализует минимум. Следовательно, при всяком j имеем

$$\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x) \leqslant \beta_{n_1 n_2 \ldots n_j}(x).$$

Но тогда при всяком j

$$x \subset Q^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j}$$

или

$$x \subset N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j}.$$

Следовательно

$$x \subset \prod_j N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j}.$$

Поэтому

$$x \subset A(\{N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j}\}).$$

Таким образом

$$CH_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset A(\{N^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{n_1 n_2 \ldots n_j}\}). \tag{6}$$

Сопоставляя (4) и (6), убеждаемся в том, что лемма доказана.

ЛЕММА II. *Всегда имеем*

$$A(\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}) = 0.$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$x \subset A(\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\});$$

тогда существует последовательность

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots \tag{7}$$

такая, что при всяком k

$$x \subset H_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

Так как $H_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ есть множество тех точек, в которых функция $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ никогда не реализует минимума, то в частности в точке x функция $\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$ не реализует минимума и для (7).

Следовательно, для всякого k можно выбрать такое $j(k)$, что

$$\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x) > \beta_{n_1 n_2 \ldots n_{j(k)}}(x). \tag{8}$$

Для определенности мы будем всегда брать за $j(k)$ наименьшее из чисел, имеющих это свойство. Обозначим теперь

$$k_1 = 1,$$
$$k_{m+1} = j(k_m),$$
$$\beta_{n_1 n_2 \ldots n_{k_m}}(x) = \beta^{(m)};$$

тогда из (8) получаем

$$\beta^{(1)} > \beta^{(2)} > \ldots > \beta^{(m)} > \ldots,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА III. *Всегда имеем*

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k} - A(\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}).$$

Доказательство. Если

$$x \subset E_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

то

$$\beta_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x) = \Omega.$$

Если кроме того

$$x \not\subset A(\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}),$$

то для всякой последовательности

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_{k+l}, \ldots$$

найдется такое j, что

$$x \not\subset E_{n_1 n_2 \dots n_j},$$

т. е.

$$\beta_{n_1 n_2 \dots n_j}(x) < \Omega.$$

Но это означает, что в точке x функция $\beta_{n_1 n_2 \dots n_k}(x)$ никогда не реализует минимума, т. е.

$$x \subset H_{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы II. Рассмотрим систему множеств $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$, входящих в класс $A(M)$. Обозначим через $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ правильное решето, составленное из множеств тела M и определяющее множество $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Положим

$$\beta_{n_1 n_2 \dots n_k}(x) = \mathrm{Ind}_x C_{n_1 n_2 \dots n_k}$$

Тогда, согласно принципу отражения, все множества $Q^{n_1 n_2 \dots n_k}_{m_1 m_2 \dots m_j}$ входят в класс $A(M)$. Поэтому все $N^{n_1 n_2 \dots n_k}_{m_1 m_2 \dots m_j}$ также входят в $A(M)$. (Пустое множество входит всегда в M.) Следовательно множества $A(\{N^{n_1 n_2 \dots n_k}_{m_1 m_2 \dots m_j}\})$ входят также в $A(M)$, так как Е. А. Селивановским ([16]) было доказано, что класс $A(A(M))$ совпадает с классом $A(M)$, если только класс M инвариантен относительно конечных пересечений.

Таким образом на основании леммы I все множества $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ входят в класс $CA(M)$. Далее, согласно лемме II

$$A(\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0$$

и согласно лемме III

$$H_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \dots n_k} - A(\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}).$$

Таким образом система множеств $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ имеет все свойства, которые требуются в нашей теореме. Тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы I. Теперь рассмотрим случай, когда

$$A(\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0,$$

причем все множества $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ попрежнему входят в класс $A(M)$.

Тогда на основании второй теоремы отделимости, приведенной выше, найдутся множества $W_{n_1 n_2 \dots n_k}$ системы $CA(M)$ такие, что

$$W_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \dots n_k} \tag{9}$$

и

$$A(\{W_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0. \tag{10}$$

В силу (9) имеем

$$E_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot CW_{n_1 n_2 \dots n_k} = 0,$$

причем оба сомножителя входят в класс $A(M)$, но тогда согласно первой теореме П. С. Новикова ([6]), цитированной выше, найдется некоторое множество $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$, входящее в $B(M)$, такое, что

$$H_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \dots n_k}$$

и

$$H_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot CW_{n_1 n_2 \dots n_k} = 0.$$

Следовательно

$$W_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

В силу (10) $A(H_{n_1 n_2 \ldots n_k}) = 0$. Теорема доказана *.

Если M совпадает с телом B-множеств бэровского пространства, то из доказанных двух теорем мы получим два новых предложения, относящихся к теории A-множеств.

Если же M минимальное тело, построенное на C-множествах классов $< \alpha$, то мы получим два новых предложения, относящихся к теории C-множеств класса α.

Обе доказанные нами теоремы без труда обобщаются.

Пусть K есть класс подмножеств множества X и Γ класс трансфинитных функций, принимающих значения $\leqslant \Omega$, определенных на элементах множества X. Мы предположим, что классы K и Γ имеют следующие свойства:

1° класс K совпадает с $A(K)$,

2° класс K совпадает с классом множеств, представимых в виде

$$E[\beta(x) = \Omega],$$

где $E[\,]$ есть известный символ Лебега, а $\beta(x)$ входит в Γ,

3° все множества вида

$$E[\gamma(x) \leqslant \beta(x)]$$

входят в класс $A(K)$, если $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ входят в Γ,

4° класс K содержит пустое множество.

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА II'. *Какова бы ни была система множеств* $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ *класса* K, *существует система множеств* $\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ *класса* CK *такая, что*

$$A(\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}) = 0$$

и

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k} - A(\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}),$$

каковы бы ни были числа $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Доказательство в точности то же, что и для теоремы II. Вместо функций $\xi_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x)$, определенных выше, следует взять функции, удовлетворяющие 2°; вместо теоремы Селивановского—опираться на 1°, вместо принципа отражения—на 3°.

Пусть L есть максимальное тело класса K. Тогда если класс K имеет еще свойство:

5° два непересекающихся множества класса K всегда отделимы множествами максимального тела L,—то верна и

* Это рассуждение есть в сущности применение теоремы IV, доказанной З. И. Козловой в работе ([11]).

ТЕОРЕМА I′. *Если $\{E_{n_1n_2\dots n_k}\}$ есть система множеств класса K и*

$$A(\{E_{n_1n_2\dots n_k}\})=0,$$

то существует система множеств $\{H_{n_1n_2\dots n_k}\}$ максимального типа Г, такая, что

$$A(\{H_{n_1n_2\dots n_k}\})=0$$

и

$$H_{n_1n_2\dots n_k}\supset E_{n_1n_2\dots n_k},$$

каковы бы ни были числа $k, n_1, n_2, \dots, n_k$.

Доказательство то же, что и для теоремы I, причем следует опираться на теорему II′ и 5°.

Эти обобщенные теоремы приложимы, в частности, к проективным множествам второго класса, если за класс K взять класс CA-множеств, а за класс Г класс минимальных индексов, определенный П. С. Новиковым (indice minimum) (7). В этой работе им установлена справедливость пп. 2°, 3° и 5°; п. 4° очевиден. Пункт 1° установлен Ливенсоном и Канторовичем (17).

II. Теорема неотделимости

Теперь мы поставим перед собой задачу о выделении класса случаев, в которых отделимость не имеет места. Наиболее значительным из результатов такого типа является установленное П. С. Новиковым [(15) или (1), гл. III] существование двух непересекающихся CA-множеств, не отделимых B-множествами. Проще всего этот факт может быть получен при помощи второй теоремы отделимости Н. Н. Лузина, цитированной в начале статьи. Мы покажем, что, опираясь на доказанную нами выше теорему II, можно установить, что в системах $CA(M)$ или CK, аналогичных описанным ранее, в достаточно широком классе случаев отделимость не имеет места. Заметим однако, что для доказательства этого приходится рассматривать не произвольные системы множеств, подчиненные лишь самым общим теоретико-множественным условиям, а системы множеств, лежащих в бэровском пространстве. Требования, налагаемые на пространство, вероятно могут быть ослаблены, но тот метод, которым мы будем пользоваться, не применим для случая множеств, лишенных какой-либо топологии.

Теперь мы перейдем к описанию тех систем множеств, для которых будет доказана теорема неотделимости.

Пусть U есть некоторый класс множеств, лежащих в бэровском пространстве I; CU — класс дополнительных множеств.

Пусть J есть некоторое пространство, гомеоморфное бэровскому. Мы будем рассматривать некоторое фиксированное гомеоморфное отображение J на I и будем считать, что образы множеств класса U, доставленные этим преобразованием, также входят в класс U. Пусть V есть совокупность всех множеств, которые входят в U вместе со своими дополнениями. Ясно, что образы рассмотренного типа множеств, вхо-

дящих в класс V, сами входят в класс V. Пусть I_x и I_y — два экземпляра бэровского пространства (элементы первого мы будем обозначать буквой x, а элементы второго буквой y). Обозначим

$$I_x \times I_y = I_{xy}.$$

Как известно, I_{xy} в свою очередь гомеоморфно бэровскому пространству. Таким образом как только выбрано некоторое гомеоморфное отображение $I_{xy} \rightleftarrows I$, в пространстве I_{xy} определены множества классов U и V. Обозначим

$$P_{x_0} = x_0 \times I_y.$$

Мы будем говорить, что множество E ($E < I_{xy}$) универсально для класса U-множеств бэровского пространства, если, каково бы ни было e, входящее в U, найдется такое x_0, что

$$P_{x_0} \cdot E = x_0 \times e.$$

Аналогично система множеств

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n, \quad \ldots$$

будет называться счетно-универсальной для класса U, если, какова бы ни была последовательность множеств

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n, \quad \ldots$$

класса U, найдется такое x, что одновременно

$$P_{x_0} \cdot E_1 = x_0 \times e_1; \quad P_{x_0} \cdot E_2 = x_0 \times e_2; \quad \ldots; \quad P_{x_0} \cdot E_n = x_0 \times e_n; \ \ldots$$

Мы будем говорить, что класс U содержит свое универсальное множество (или свое счетно-универсальное семейство), если множество E (или все множества $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$) входят в U. Точно так же мы скажем, что класс U не содержит своего универсального множества, если при выбранном ранее гомеоморфном отображении не существует ни одного множества, лежащего в I_{xy}, входящего в U и универсального для класса U.

Теперь мы подчиним класс K и его максимальное тело L множеств бэровского пространства следующим требованиям:

a) класс K содержит свое счетно-универсальное семейство,

b) класс L не содержит своего универсального множества,

c) для класса K верна теорема II.

Последнее означает, что, какова бы ни была система множеств $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ класса K, существует система множеств $\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ класса CK такая, что

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k} - A(\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}),$$

каковы бы ни были числа $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ и

$$A(\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}) = 0.$$

Мы докажем следующую теорему, обобщающую известные теоремы о кратной неотделимости CA-множеств:

ТЕОРЕМА III. *Если класс K удовлетворяет условиям* a), b) и c), *то существует система множеств* $\{\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ *класса CK, обладающая следующими свойствами*:

1° $A(\{\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}) = 0$;

2° *для всякой системы множеств* $\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ *класса L такой, что*

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset \mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

каковы бы ни были числа $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$, имеем

$$A(\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}) \neq 0.$$

Доказательство. Пусть в классе CK существует счетная система множеств

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots,$$

обладающая следующими свойствами:

1° $\prod\limits_n Q_n = 0$;

2° какова бы ни была система множеств $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ класса L таких, что

$$H_n \supset E_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

имеем

$$\prod_n H_n \neq 0.$$

Тогда в классе CK найдется и система $\{\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$, удовлетворяющая условиям теоремы. В самом деле, достаточно положить

$$\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k} = Q_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ввиду этого мы будем строить пример кратной неотделимости для пересечения. Пусть

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

есть счетно-универсальная для класса K система множеств этого класса, которая существует в силу условия a).

Так как в классе K верна теорема II, то найдется система множеств

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots \tag{11}$$

класса CK такая, что

$$Q_n \supset U_n - \Pi U_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

и

$$\Pi Q_n = 0.$$

Мы покажем, что система множеств (11) имеет указанное выше свойство. Этим теорема будет доказана. Предположим противное. Пусть

$$H_n \supset Q_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\Pi H_n = 0$$

и все множества $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ входят в класс L. В таком случае H_1 есть универсальное множество для класса L. В самом деле, пусть e есть некоторое множество класса L, расположенное в I_y. Тогда Ce также входит в класс L. I_y всегда входит в класс L. Так как

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

есть счетно-универсальная система, то найдется такое x_0, что

$$P_{x_0} \cdot U_1 = x_0 \times e; \quad P_{x_0} \cdot U_2 = x_0 \times Ce,$$
$$P_{x_0} \cdot U_n = x_0 \times I_y, \quad n > 2.$$

Ясно, что

$$P_{x_0} \cdot \Pi U_n = x_0 \times (e \cdot Ce) = 0.$$

Поэтому при всяком n имеем

$$P_{x_0} \cdot U_n \subset Q_n;$$

следовательно

$$x_0 \times I_y \subset Q_n, \quad n > 2 \tag{13}$$

и

$$x_0 \times e \subset Q_1, \quad x_0 \times Ce \subset Q_2. \tag{14}$$

С другой стороны,

$$\Pi Q_n = 0,$$

поэтому

$$P_{x_0} \cdot \Pi Q_n = \Pi (P_{x_0} \cdot Q_n) = 0. \tag{15}$$

В силу (13)

$$P_{x_0} \cdot Q_n = x_0 \times I_y \qquad n = 3, 4, 5, \ldots .$$

Но тогда из (14) и (15)

$$P_{x_0} \cdot Q_1 = x_0 \times e; \quad P_{x_0} \cdot Q_2 = x_0 \times Ce. \tag{16}$$

Таким же образом из соотношений

$$\prod_n H_n = 0 \quad \text{и} \quad H_n \supset Q_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

заключаем, что

$$P_{x_0} \cdot H_n = x_0 \times I_y \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

и

$$P_{x_0} \cdot H_1 = x_0 \times e; \quad P_{x_0} \cdot H_2 = x_0 \times Ce.$$

Так как e было произвольным множеством класса L, то первое из этих равенств показывает, что H_1 универсально для класса L. Это противоречит условию b), так как H_1 входит в класс L. Теорема доказана.

Легко видеть, что условиям этой теоремы, т. е. условиям, наложенным на класс CK, удовлетворяют следующие семейства множеств:

1) класс CA-множеств,

2) класс дополнений к C-множествам класса α,

3) класс A_2-множеств.

В самом деле, выполнимость условия a) установлена в ([1]) для A и CA_2-множеств и в ([16]) для C-множеств класса α. Выполнимость условия b) для всех трех случаев изложена в дополнении Серпинского к ([1]). Выполнимость условия c) изложена соответственно в [([1]), гл. III] для A-множеств, в ([6]) для C-множеств класса α и в ([7]) для CA_2-множеств.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
16. VI. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lusin N. N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.
[2] Новиков П. С., Об одном свойстве аналитических множеств, ДАН, II, № 5 (1934).
[3] Новиков П. С., О кратной отделимости аналитических множеств, ДАН, III, № 5 (1934).
[4] Новиков П. С., Обобщение второго принципа отделимости, ДАН, IV, № 1—2 (1934).
[5] Новиков П. С., О некоторых системах множеств, инвариантных относительно A-операций, ДАН, III, № 8—9 (1934).
[6] Новиков П. С., Отделимость C-множеств, Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. № 2 (1937).
[7] Novikoff P. S., Sur la séparabilité des ensembles projectifs de deuxième classe, Fund. Mat., XXV.
[8] Лузин Н. Н., Несколько замечаний о кратной отделимости, ДАН, II, № 5 (1934).
[9] Sierpinski V., Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B, Fund. Mat., XXIII.
[10] Ruziewitch S., Sur la séparabilité multiple des ensembles, Fund. Mat. XXIV.
[11] Козлова З. И., Аксиоматика кратной отделимости (рукопись).
[12] Ляпунов А. А., О счетно-кратной отделимости аналитических множеств, ДАН, II, № 5 (1934).
[13] Ляпунов А. А., Contribution à l'étude de la séparabilité multiple, Мат. сборн., 1 (43) : 4 (1936).
[14] Хаусдорф Ф., Теория множеств, 1937.
[15] Novikoff P., Sur les fonctions implicites mesurables, Fund. Mat. XVII.
[16] Селивановский Е. А., Об одном классе эффективных множеств, Мат. сборн. XXXV, № 3—4 (1928).
[17] Kantorowich L. and Livenson E., Analytical operations and projectif sets, Fund. Mat. XVIII.

A. LIAPOUNOFF. SÉPARABILITÉ MULTIPLE POUR LE CAS DE L'OPÉRATION (A)

RÉSUMÉ

Soit M un corps de sousensembles d'un ensemble abstrait X. Désignons par $A(M)$ la classe de tous les ensembles que l'on peut obtenir au moyen de l'opération (A) à partir d'ensembles du corps M. Soit $CA(M)$ la classe des ensembles complémentaires par rapport à X aux ensembles de la classe $A(M)$. Soit $B(M)$ la réunion de tous les ensembles qui font simultanément partie de $A(M)$ et de $CA(M)$. Posons

$$A(\{W_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k \dots} \prod_k W_{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

Ces notations étant admises, nous avons les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Étant donné un système d'ensembles $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de la classe $A(M)$ tel que*

$$A(\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0,$$

il existe toujours un système d'ensembles $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de classe $B(M)$ tel que

$$A(\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0$$

et

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

pour tout cortège $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ d'entiers positifs.

THÉORÈME II. *Quel que soit le système $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ d'ensembles de classe $A(M)$ il existe un système d'ensembles $\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ de classe $CA(M)$ tel que*

$$A(\{H_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}) = 0$$

et

$$H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \ldots n_k} - A(\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\})$$

pour tout cortège $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ d'entiers positifs.

Ces théorèmes ont lieu en particulier dans le cas des ensembles A et des ensembles C de classe α.

Nous démontrons d'ailleurs, qu'ils peuvent être généralisés au cas des ensembles projectifs de la classe CA_2.

Nous considérons encore le cas où X est l'espace de Baire. Il existe alors dans certaines conditions assez larges un théorème de non-séparabilité pour les systèmes $\{\mathcal{E}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ d'ensembles de classe $CA(M)$. Ce théorème est applicable au cas des ensembles A et des ensembles C de classe α. Nous démontrons d'ailleurs qu'il est applicable sous une forme plus générale au cas des ensembles CA_2.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

И. И. ИБРАГИМОВ

О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе устанавливается радиус полноты некоторых систем аналитических функций. В частности доказывается, что система $\{z^n e^{i\alpha_n z}\}$ полна в круге радиуса, большего $\ln 2$, система $\{z^n e^{e^{i\alpha n_z}}\}$, α — действительно, полна в круге $|\lambda_0| = |z|$, где λ_0—ближайший к началу нуль функции $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{n!} z^n$. Система $\{z^n \varphi^{(n)}(z)\}$ полна в круге того радиуса, где $\varphi(z)$ регулярна, если все $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Задача об установлении полноты системы аналитических функций, если ее решать с помощью ортогонализации данной системы функций по контуру или по площади, в общем случае не имеет решения вследствие неэффективности условий полноты, которые при этом получаются. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые частные случаи систем аналитических функций, не прибегая к их ортогонализации при решении поставленной задачи. Такого рода исследования (не опирающиеся на ортогонализацию данной системы функций) могут быть проведены с помощью некоторых приемов, встречающихся в решении интерполяционных задач, как это например сделано А. О. Гельфондом в работе (1).

Во всех рассматриваемых ниже случаях оказывается возможным установить, что любая степень z в некотором круге может быть как угодно хорошо аппроксимирована с помощью линейной формы с постоянными коэффициентами от функций нашей системы. Последнее же обстоятельство, так как система целых неотрицательных степеней полна в любой конечной области комплексной плоскости, является естественным доказательством полноты нашей системы функций.

Так как в данной работе будут рассмотрены случаи полноты системы аналитических функций в круге конечного радиуса с центром в начале, то мы введем понятие радиуса полноты данной системы аналитических функций.

Радиус максимального круга с центром в начале, внутри которого данная система будет полна, мы будем называть радиусом полноты данной системы аналитических функций.

Выражаю сердечную благодарность моему учителю и руководителю А. О. Гельфонду за ценные указания при выполнении настоящей работы.

§ 1

Существует прямая связь между проблемой полноты данной системы аналитических функций и задачей построения целой функции по системе чисел, связанных с данной системой функций и с данной целой функцией, например между полнотой системы функций 1, $ze^z, z^2e^{2z}, \ldots$ $\ldots, z^ne^{nz}, \ldots$ и проблемой единственности целой функции $F(z)$ первого порядка и конечного типа σ, у которой заданы числа $F^{(n)}(n)$, $n=0$, $1, 2, \ldots$ [2]. Поэтому мы докажем прежде всего одну общую теорему, относящуюся к связи между этими задачами. Теорема эта позволит в ряде случаев установить верхнюю границу радиуса круга с центром в начале, внутри которого данная система аналитических функций может быть полной.

ТЕОРЕМА I. *Пусть каждая функция последовательности*

$$u_1(z), \quad u_2(z), \ldots, u_n(z), \ldots \tag{1}$$

регулярна внутри круга радиуса R с центром в начале координат, причем система функций (1) полна внутри этого же круга. Пусть $F(z)$ целая функция первого порядка типа σ, где $\sigma < R$, а функция $f(z)$ ассоциирована с $F(z)$ по Борелю. Тогда функцию $F(z)$ можно представить в виде ряда полиномов

$$F(z) = \sum_{k=0}^{N} A_k P_k(z) + R_n(z), \tag{2}$$

где полиномы $P_k(z)$ связаны только с системой функций (1) и не зависят от функции $F(z)$; коэффициентами этого ряда будут числа

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\, u_n(z)\, dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

причем $|R_N(z)|$ равномерно стремится к нулю при $N \to \infty$ в круге $|z| \leqslant \rho$ любого постоянного радиуса ρ.

Для доказательства этой теоремы заметим, что функция $e^{z\xi}$ для всяких конечных z и ξ представляется рядом Тейлора

$$e^{z\xi} = 1 + \frac{\xi z}{1!} + \frac{(\xi z)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\xi z)^N}{N!} + R_N^*(z, \xi), \tag{4}$$

где $|R_N^*(z, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для достаточно большого n, и $|z| < \rho$, $|\xi| < R$, причем ε — сколь угодно малая положительная величина, зависящая только от ρ и R.

Кроме того очевидно, что любая положительная степень может быть аппроксимирована при помощи функций системы (1), так как эта система, по предположению, полна внутри круга $|\xi| \leqslant R$, иначе говоря, имеет место неравенство

$$\left|\xi^k - \sum_{n=0}^{N} u_n(\xi) B_n\right| < \frac{\varepsilon}{6\rho^k}. \tag{5}$$

Умножая обе части неравенства (5) на $\frac{z^k}{k}$ и суммируя по k, найдем

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\frac{(\xi z)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{N}\frac{z^k}{k!}\sum_{n=0}^{N}u_n(\xi)B_n\right|<\frac{\varepsilon}{6}\cdot e<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

откуда на основании (4) имеем

$$\left|e^{\xi z}-\sum_{k=0}^{N}u_k(\xi)P_k(z)\right|<\varepsilon \tag{6}$$

или

$$e^{\xi z}=\sum_{k=0}^{N}u_k(\xi)P_k(z)+R_N^*(z,\xi), \tag{6'}$$

где $|R_N^*(z,\xi)|<\varepsilon$ внутри круга с центром в начале координат радиуса $R_1<R$, $\sigma<R_1<R$.

Известно, что между функциями $F(z)$ и $f(z)$ существует следующее соотношение:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R_1}e^{\xi z}f(\xi)\,d\xi,\ \ \sigma<R_1<R, \tag{7}$$

где функция $f(z)$ регулярна вне круга $|\xi|\leqslant\sigma$.

Подставляя в равенства (7) вместо $e^{z\xi}$ его выражение из равенства 6'), находим

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R_1}\sum_{k=0}^{N}P_k(z)\,u_k(\xi)f(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R_1}R_N^*(z,\xi)f(\xi)\,d\xi=\sum_{k=0}^{N}A_kP_k(z)+R_N(z), \tag{8}$$

причем $|R_N(z)|$ и $|R_N^*(z,\xi)|$ одновременно равномерно стремятся к нулю при $N\to\infty$. Это и доказывает нашу теорему.

Следствие. Легко заметить, что равенство (8) можно написать в следующем виде:

$$F(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}A_kP_k(z). \tag{8'}$$

Из равенства (8′) легко получить теорему единственности целых функций: $F(z)\equiv 0$, если только все числа $A_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Тип функции $F(z)$ есть σ, $\sigma<R$, где R — радиус полноты системы функций $u_1(z)$, $u_2(z), \ldots, u_n(z), \ldots$,

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}f(z)\,u_n(z)\,dz,\ \ n=0, 1, 2, \ldots$$

§ 2

В настоящем параграфе мы докажем, что радиус полноты системы функций $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$, $|\alpha_n|\leqslant 1$, $n=0, 1, 2, \ldots$ будет всегда не меньше $\ln 2$.

Для доказательства этого утверждения необходимо дать оценку роста полиномов $C_n(z)$ при неограниченно возрастающем n.

Пусть имеем

$$C_n(z)=\int\limits_{a_0}^{z}\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_1 dt_2\dots dt_n. \qquad (1)$$

Путем последовательного интегрирования мы можем получить рекуррентную формулу для $C_n(z)$:

$$C_n(z)=-\frac{a_{n-1}}{1!}C_{n-1}(z)-\frac{a_{n-2}^2}{2!}C_{n-2}(z)-\dots$$
$$\dots-\frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}C_1(z)-\frac{a_0^n}{n!}+\frac{z^n}{n!}. \qquad (2)$$

Фиксируя $|z|$, т. е. полагая $|z|=\rho$, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&|C_n|\leqslant\frac{|C_{n-1}|}{1!}+\dots+\frac{|C_1|}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}+\frac{\rho^n}{n!},\\
&|C_{n-1}|\leqslant\frac{|C_{n-2}|}{1!}+\dots+\frac{|C_1|}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|C_1|\leqslant 1+\rho.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Составим следующую вспомогательную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_n=\frac{\gamma_{n-1}}{1!}+\frac{\gamma_{n-2}}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{\rho^n}{n!},\\
&\gamma_{n-1}=\frac{\gamma_{n-2}}{1!}+\frac{\gamma_{n-3}}{2!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\gamma_1=1+\rho.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Сравнивая системы уравнений (3) и (4), замечаем, что $|C_1|\leqslant\gamma_1$ и поэтому $|C_2|\leqslant\gamma_2,\dots,|C_n|\leqslant\gamma_n,\dots$

Возьмем функцию $\varphi(z)$, разложение которой имеет вид

$$\varphi(z)=1+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\dots+\gamma_n z^n+\dots \qquad (5)$$

Умножая обе части равенства (5) на e^z-1, найдем

$$\varphi(z)(e^z-1)=(1+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\dots+\gamma_n z^n+\dots)\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots\right)=$$
$$=z+\left(\gamma_1+\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(\gamma_2+\frac{\gamma_1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)z^3+\dots$$
$$\dots+\left(\gamma_{n-1}+\frac{\gamma_{n-2}}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)z^n+\dots \qquad (6)$$

На основании системы уравнений (4) равенство (6) запишется так:

$$\varphi(z)(e^z-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\gamma_n-\frac{\rho^n}{n!}\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho z)^n}{n!}=\varphi(z)-e^{\rho z},$$

откуда

$$\varphi(z)=\frac{e^{\rho z}}{2-e^z}. \qquad (7)$$

Из равенства (7) легко видеть, что имеет место следующая формула:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\gamma_n}\leqslant\frac{1}{\ln 2}, \qquad (8)$$

или, что то же самое,

$$\gamma_n \leqslant \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{(1+\varepsilon)n}, \tag{8'}$$

где $\varepsilon \to 0$ при n, стремящемся к бесконечности.

Но мы дадим более точную оценку величины γ_n. Используя способ Коши разложения аналитической функции в ряд рациональных дробей, функцию $\frac{1}{2-e^z}$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2-e^z} = \frac{1}{\ln 2 - z} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\pi i + \ln 2 - z} + \frac{1}{-2k\pi i + \ln 2 - z}\right), \tag{9}$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2-e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} + o\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\right). \tag{10}$$

Далее, отсюда также следует, что

$$\frac{e^{\rho z}}{2-e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{\rho^k}{k!}. \tag{11}$$

Пользуясь соотношением (10), мы без труда получим оценку для γ_n:

$$\gamma_n < A(\ln 2)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln 2\cdot\rho)^k}{k!} < A(\ln 2)^{-n}2^{\rho}, \tag{12}$$

где A не зависит от ρ и n.

Отсюда окончательно следует, что, при всяком n и z, $C_n(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|C_n(z)| < A(\ln 2)^{-n}\, 2^{|z|}, \tag{13}$$

где A не зависит от n и z.

ТЕОРЕМА II. *Если все числа* α_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *находятся в единичном круге,* $|z| \leqslant \rho$, ρ — *произвольное конечное,* $|\xi| \leqslant \gamma$, $\gamma < \ln 2$, *то функция* $e^{z\xi}$ *может быть представлена равномерно сходящимся рядом*

$$e^{z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n e^{\alpha_n\xi}\int_{\alpha_0}^{z}\int_{\alpha_1}^{t_1}\ldots\int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_1 dt_2 \ldots dt_n. \tag{14}$$

Следствием этой теоремы будет полнота системы функций $\{\xi^n e^{\alpha_n\xi}\}$ в круге $|\xi| < \ln 2$.

Действительно, дифференцируя ряд (14) k раз по z, что возможно в силу его равномерной сходимости, и полагая $z = 0$, получим

$$\xi^k = \sum_{n=k}^{\infty} \xi^k e^{\alpha_n\xi}\int_{\alpha_k}^{0}\int_{\alpha_{k+1}}^{t_{k+1}}\ldots\int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_{k+1}\ldots dt_n, \tag{15}$$

т. е. что ξ^k при любом положительном k представляется равномерно сходящимся рядом функций $\{\xi^n e^{\alpha_n\xi}\}$ с постоянными коэффициентами. Отсюда следует полнота нашей системы, так как система степеней ξ^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, полна в любой конечной области.

Для доказательства теоремы II предположим, что задано разложение

$$\Phi(z, \xi) = e^{\alpha_0 \xi} + \xi e^{\alpha_1 \xi} \int_{\alpha_0}^{z} dt_1 + \ldots + \xi^n e^{\alpha_n \xi} \int_{\alpha_0}^{z} \ldots \int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_1 \ldots dt_n + \ldots \quad (16)$$

или

$$\Phi(z, \xi) = \sum_{k=0}^{N} P_k(z) \xi^k e^{\alpha_k \xi} + \delta_N, \quad (16')$$

где

$$|\delta_N| < \varepsilon, \quad P_k(z) = \int_{\alpha_0}^{z} \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_{k-1}}^{t_{k-1}} dt_1 dt_2 \ldots dt_k,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|P_k(z)|} = \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \geqslant \ln 2.$$

Равномерная сходимость этого ряда при переменных z и ξ, $|\xi| \leqslant \gamma < \ln 2$, $|z| \leqslant \rho$, где ρ — произвольное постоянное, есть непосредственное следствие неравенства (13), так как $|\alpha_n| \leqslant 1$.

Покажем, что при $|\xi| < \rho$, $\rho \leqslant \ln 2$ функция $\Phi(z, \xi)$ совпадает с функцией $e^{z\xi}$. Для этой цели заметим, что имеет место следующее разложение:

$$\xi^k e^{\alpha_k \xi} = \sum_{s=k}^{N} \xi^s \cdot \frac{\alpha_k^{s-k}}{(s-k)!} + R_N(\xi), \quad (17)$$

где

$$|R_N(\xi)| < \varepsilon, \quad |\xi| \leqslant \rho_N < \ln 2, \quad N > N_0(\rho, \varepsilon).$$

Умножая обе части равенства (17) на $C_k(z)$, суммируя в пределах от $k=0$ до $k=N$ и пользуясь равенством (2), получаем

$$\Phi(z, \xi) = \sum_{k=0}^{N} C_k(z) \sum_{s=k}^{N} \xi^s \frac{\alpha_k^{s-k}}{(s-k)!} + \sum_{k=0}^{N} C_k(z) R_N(\xi) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \frac{(\xi z)^s}{s!} + R_N^*(z, \xi) = e^{z\xi}, \quad (18)$$

где $|R_N^*(z, \xi)|$ и $|R_N(\xi)|$ одновременно равномерно стремятся к нулю.

Очевидно равенство (18) имеет место для всякого z, лежащего в конечной области, если только $|\xi| \leqslant \rho$. Итак, мы получаем следующее представление для $e^{z\xi}$ при $|\xi| \leqslant \rho$, $|z| \leqslant R$, где $\rho \leqslant \ln 2$, R — произвольное постоянное:

$$e^{z\xi} = e^{\alpha_0 \xi} + \xi e^{\alpha_1 \xi} \int_{\alpha_0}^{z} dt_1 + \xi^2 e^{\alpha_2 \xi} \int_{\alpha_0}^{z} \int_{\alpha_1}^{t_1} dt_1 dt_2 + \ldots$$

$$\ldots + \xi^n e^{\alpha_n \xi} \int_{\alpha_0}^{z} \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_1 dt_2 \ldots dt_n + \ldots \quad (19)$$

или

$$e^{z\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \xi^k e^{\alpha_k \xi}, \quad (19')$$

что и доказывает нашу теорему.

Пусть теперь $F(z)$ будет целой функцией первого порядка конечного типа σ, $\sigma < \ln 2$ и $f(z)$ ассоциированная с ней по Борелю.

Умножая обе части равенства (19′) на $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$, интегрируя вдоль замкнутого контура C окружности $|\xi| = \rho$, $\sigma < \rho < \ln 2$, содержащего все особенности $f(\xi)$ внутри себя, и наконец, пользуясь известными соотношениями

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

а также равенством

$$A_n = F^{(n)}(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \xi^n e^{\alpha_n \xi} f(\xi)\, d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

получаем

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\alpha_n) P_n(z). \tag{20}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА III *. *Пусть* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ *целая функция порядка* ρ *типа* σ *и* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ *функция, ассоциированная с* $F(z)$ *по Борелю; пусть, далее, заданы связанные с* $F(z)$ *числа*

$$A_n = F^{(n)}(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \xi^n e^{\alpha_n \xi} f(\xi)\, d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

точки α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *лежат внутри единичного круга; пусть, наконец, тип функции* $F(z)$ *есть* σ, $\sigma < \rho$, $\rho < \ln 2$. *Тогда функция* $F(z)$ *представляется рядом Абеля*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\alpha_n) P_n(z),$$

равномерно сходящимся внутри круга $|z| \leqslant R$, *где* R — *произвольно большое число.*

Следствие. Из этой теоремы легко получается теорема единственности целых функций: $F(z) \equiv 0$, если только все числа $F^{(n)}(\alpha_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $|F(z)| < Ae^{\gamma |z|}$, $\gamma < \ln 2$ и $|\alpha_n| \leqslant 1$.

Мы установили, что радиус полноты системы функций $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$ при условии $|\alpha_n| \leqslant 1$ не может быть меньше $\ln 2$. Но легко показать также, что будет существовать последовательность чисел $\{\alpha_n\}$, при которой радиус полноты системы функций $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$ будет не больше $\frac{\pi}{4}$

$$\left(\frac{\pi}{4} - \ln 2 = 0.78540 - 0.69326 = 0.09214\right).$$

* В работе В. Л. Гончарова ([3]) оценка для $P_n(z)$ менее точна, а именно соответствующее разложение (20) должно сходиться при $\sigma < \frac{1}{2e}$.

Положим $\alpha_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; функция $F(z) = \sin\frac{\pi}{4}(z-1)$ будет иметь, как легко убедиться, все числа $A_n = F^{(n)}[(-1)^n] = 0$ и тип ее будет $\sigma = \frac{\pi}{4}$.

На основании теоремы I, если только допустить, что радиус полноты системы функций $\{z^n e^{(-1)^n z}\}$ больше $\frac{\pi}{4}$, т. е. $R > \frac{\pi}{4}$, будем иметь

$$\sin\frac{\pi}{4}(z-1) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k P_k(z) \equiv 0,$$

что невозможно. Значит, радиус полноты системы функций $\{z^n e^{(-1)^n z}\}$ будет не больше $\frac{\pi}{4}$. В дальнейшем мы увидим, что он равен $\frac{\pi}{4}$.

§ 3

В этом параграфе мы определим радиус полноты системы функций $\{z^n e^{e^{i\alpha n} z}\}$, где α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, любое действительное число. В этом случае $\alpha_n = e^{i\alpha n}$, $|\alpha_n| = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

С этой целью, так же как в § 1, необходимо дать оценку роста полиномов $C_n(z)$ при неограниченном возрастании n, определяемых равенством

$$C_n(z) = \int\limits_1^z \int\limits_{e^{i\alpha}}^{t_1} \ldots \int\limits_{e^{i\alpha(n-1)}}^{t_{n-1}} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Заметим, что путем последовательного интегрирования мы получаем рекуррентную формулу для $C_n(z)$:

$$C_n(z) = -e^{i\alpha(n-1)} C_{n-1}(z) - \frac{e^{2i\alpha(n-2)}}{2!} C_{n-2}(z) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{e^{i\alpha(n-1)}}{(n-1)!} C_1(z) - \frac{1}{n!} + \frac{z^n}{n!}. \tag{2}$$

Дифференцируя по z обе части равенства (1), получаем

$$C_n'(z) = \int\limits_{e^{i\alpha}}^{z} \int\limits_{e^{2i\alpha}}^{t_1} \ldots \int\limits_{e^{i\alpha(n-1)}}^{t_{n-1}} dt_2\, dt_3 \ldots dt_n. \tag{3}$$

Сделаем следующие подстановки:

$$t_2 = t_2' e^{i\alpha}, \ \ldots, \ t_n = t_n' e^{i\alpha};$$

тогда равенство (3) примет вид

$$C_n'(z) = e^{i\alpha} \ldots e^{i\alpha} \int\limits_1^{e^{-i\alpha} z} \int\limits_{e^{i\alpha}}^{t_1} \ldots \int\limits_{e^{i\alpha(n-1)}}^{t_{n-2}} dt_1 \ldots dt_{n-1} = e^{i\alpha(n-1)} C_{n-1}(e^{i\alpha} z).$$

Итак, мы получаем, что $C_n(z)$ удовлетворяет соотношению

$$C_n'(z) = e^{i\alpha(n-1)} \cdot C_{n-1}(e^{i\alpha} z). \tag{4}$$

Теперь возьмем вспомогательную функцию

$$f(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i} C_n(z) \lambda^n. \tag{5}$$

Дифференцируя по z это равенство, находим

$$f'_z(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i} C'_n(z) \lambda^n. \tag{6}$$

Подставляя значение $C'_n(z)$ из (4) в (6), получаем

$$f'_z(z, \lambda) = \lambda f(ze^{-i\alpha}, \lambda). \tag{7}$$

Итак, мы находим, что функция $f(z, \lambda)$ удовлетворяет функциональному уравнению (7) или

$$f'(z) = \lambda f(ze^{-i\alpha}), \tag{7'}$$

где λ — произвольный параметр.

Построим решение функционального уравнения (7). Функцию $\varphi(z)$ возьмем в следующем виде:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \tag{8}$$

Дифференцируя по z соотношение (8), получаем

$$\varphi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^n. \tag{8'}$$

На основании функционального уравнения (7') из равенств (8) и (8') находим

$$\varphi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \frac{a_n}{n!} e^{-ni\alpha} z^n. \tag{9}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (9), получаем

$$a_{n+1} = \lambda a_n e^{-ni\alpha}. \tag{10}$$

Из равенства (10), полагая $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$a_1 = \lambda a_0,$$
$$a_2 = \lambda a_1 e^{-i\alpha} = a_0 \lambda^2 e^{-i\alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = a_0 \lambda^n e^{-(1+2+3+\ldots+\overline{n-1})i\alpha} = a_0 \lambda^n e^{-\frac{n(n-1)}{2} i\alpha}.$$

Подставляя найденные значения для a_n в соотношение (8) и полагая $a_0 = 1$, находим

$$\varphi(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{n(n-1)}{2} i\alpha}}{n!} (\lambda z)^n. \tag{11}$$

Из соотношения (11) имеем

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2} i\alpha}}{n!} \lambda^n. \tag{12}$$

Очевидно функция $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi'(\lambda) = \varphi(\lambda e^{-i\alpha}). \tag{13}$$

Умножая равенства (5) на $\varphi(\lambda)$ и используя соотношение (2), находим

$$f(z, \lambda)\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left[C_n(z) e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i} + \frac{C_{n-1}(z)}{2!} e^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha i} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1(z)}{(n-1)!} e^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2} i\alpha} + \frac{1}{n!} e^{-\frac{n(n-1)}{2} i\alpha} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{z^n}{n!} e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i} = \varphi(\lambda z).$$

Итак, получаем решение функционального уравнения (7) или (7′):

$$f(z, \lambda) = \frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(\lambda)}, \tag{14}$$

$$f(z) = \frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(\lambda)}. \tag{14′}$$

Допустим, что λ_0 — самый близкий к началу координат нуль функции $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\lambda_0) = 0$. Как известно, в этом случае мы можем утверждать, что имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} = \frac{1}{|\lambda_0|}. \tag{15}$$

Следовательно, мы можем сформулировать предложение:

ТЕОРЕМА IV. *Радиус полноты системы функций* $\{z^n e^{e^{i\alpha n} z}\}$ *при произвольно заданном* α, *где* $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, *равен* $|\lambda_0|$.

На основании теоремы II § 1, так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

система $\{z^n e^{e^{i\alpha n} z}\}$ полна в круге $|z| < |\lambda_0|$. Докажем, что она не может быть полна в круге большего радиуса.

Возьмем функцию

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{n!} z^n. \tag{11′}$$

Это будет функция первого порядка типа $|\lambda_0|$, так как $|\varphi(\lambda_0 z)| \leqslant \leqslant e^{|\lambda_0|\cdot|z|}$. Кроме того, так как

$$\varphi^{(n)}(\lambda_0 z) = \lambda_0^n e^{-\frac{n(n-1)}{2} i\alpha} \varphi(\lambda_0 e^{-i\alpha n} z),$$

то

$$\varphi^{(n)}(\lambda_0 e^{i\alpha n}) = \lambda_0^n e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i} \varphi(\lambda_0) = 0,$$

т. е.

$$A_n = \varphi^{(n)}(\lambda_0 e^{i\alpha n}) = 0.$$

На основании теоремы I, если только мы предположим, что система функций $\{z^n e^{e^{i\alpha n} z}\}$ полна в круге $|z| = R$, где $R > |\lambda_0|$, мы получаем, что

$$\varphi(\lambda_0 z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(\lambda_0 e^{i\alpha n}) P_n(z) = 0;$$

это показывает, что система не может быть полна в круге радиуса большего $|\lambda_0|$. Значит, радиус полноты системы функций $\{z^n e^{e^{i\alpha n}z}\}$ будет $|\lambda_0|$.

Полагая $\alpha = \pi$, получаем пример, показывающий, что $|\lambda_0| = \frac{\pi}{4}$. В самом деле, очевидно в этом случае числа $e^{i\alpha n} = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\pi i}}{n!} z^n = \sin z + \cos z.$$

Очевидно, самый близкий к началу координат нуль функции $\varphi(z) = \sin z + \cos z$ есть $\lambda_0 = -\frac{\pi}{4}$, т. е. $|\lambda_0| = \frac{\pi}{4}$.

Взяв теперь $\alpha_n = e^{i\alpha n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ для функции $e^{z\xi}$, на основании теоремы II, будем иметь следующее представление:

$$e^{z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n e^{e^{i\alpha n}\xi} P_n(z), \tag{16}$$

где

$$P_n(z) = \int_1^z \int_{e^{i\alpha}}^{t_1} \ldots \int_{e^{i\alpha(n-1)}}^{t_{n-1}} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \tag{17}$$

Пусть $F(z)$ целая функция первого порядка и конечного типа σ, $\sigma < |\lambda_0|$, и $f(z)$ — функция, ассоциированная с ней по Борелю. Умножая обе части равенства (16) на $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$, интегрируя вдоль замкнутого контура C окружности $|\xi| = \rho$, $\sigma < \rho < |\lambda_0|$, содержащего все особенности $f(\xi)$ внутри себя, и наконец, используя известное соотношение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{z\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

а также равенство

$$A_n = F^{(n)}(e^{i\alpha n}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \xi^n e^{e^{i\alpha n}\xi} f(\xi)\, d\xi,$$

получаем

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(e^{i\alpha n}) P_n(z). \tag{18}$$

Следовательно, мы можем формулировать следующее предложение:

ТЕОРЕМА V. *Пусть $F(z)$ целая функция первого порядка типа σ и $f(z)$ функция, ассоциированная с $F(z)$ по Борелю; пусть затем заданы связанные с $F(z)$ числа*

$$A_n = F^{(n)}(e^{i\alpha n}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \xi^n e^{e^{i\alpha n}\xi} f(\xi)\, d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где C — замкнутый контур, содержащий внутри себя все особенности $f(z)$; тогда, если тип σ функции $F(z)$ меньше $|\lambda_0|$, функция $F(z)$ представляется рядом Абеля

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(e^{i\alpha n}) P_n(z),$$

равномерно сходящимся внутри круга $|z| \leqslant R$, где R — любое положительное число, которое может быть взято сколь угодно большим.

Из этой теоремы легко можно получить теорему единственности целых функций: $F(z) \equiv 0$, если только все числа $F^{(n)}(e^{i\alpha n})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, равны нулю и $F(z) < Ae^{\gamma|z|}$, $|\gamma| < |\lambda_0|$, где λ_0 — наименьший по модулю корень уравнения

$$\varphi(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha i}}{n!} \lambda^n = 0.$$

§ 4

Предположим, что α_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. что $|\alpha_n| < \delta$ при $n = k, k+1, \ldots$, где δ — сколь угодно мало, причем $k = k(\delta)$ зависит от δ. Требуется определить радиус полноты системы функций $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$, где предполагается

$$1 \geqslant |\alpha_0| > |\alpha_1| > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_k| > \ldots > |\alpha_n| > \ldots \qquad (1)$$

Для этой цели нужно будет, так же, как в § 1 и § 2, оценить полиномы

$$C_n(z) = \int_{\alpha_0}^{z} \int_{\alpha_1}^{t_1} \ldots \int_{\alpha_{k-1}}^{t_{k-1}} \ldots \int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_1\, dt_2 \ldots dt_k \ldots dt_n \qquad (2)$$

при неограниченном возрастании n. Очевидно, имеет место неравенство

$$|C_n| \leqslant \left(\int_{|\alpha_0|}^{|z|} \ldots \int_{|\alpha_{k-1}|}^{|t_{k-1}|} dt_1\, dt_2 \ldots dt_k \right) M_n, \qquad (3)$$

где положено

$$M_n = \max \left| \int_{\alpha_k}^{t_k} \ldots \int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_{k+1} \ldots dt_n \right|, \qquad (4)$$

причем $|t_k| \leqslant |z| \leqslant \rho$.

Для определения M_n сделаем подстановку

$$t_s = \delta t_s', \quad s = k+1, k+2, \ldots, n-1;$$

тогда будем иметь

$$M_n = \max \left| \int_{\frac{\alpha_k}{\delta}}^{\frac{t}{\delta}} \ldots \int_{\frac{\alpha_{n-1}}{\delta}}^{t_{n-1}} dt_{k+1} \ldots dt_n \right| \delta^{n-k}. \qquad (5)$$

Очевидно, что при любом δ можно подобрать k так, чтобы все числа $\left|\frac{\alpha_n}{\delta}\right|$, $n = k, k+1, \ldots$, были меньше единицы. Тогда, на основании формулы (12) § 1 будем иметь

$$\left| \int_{\frac{\alpha_k}{\delta}}^{\frac{t}{\delta}} \int_{\frac{\alpha_{k+1}}{\delta}}^{t_1} \ldots \int_{\frac{\alpha_{n-1}}{\delta}}^{t_{n-1}} dt_{k+1}\, dt_{k+2} \ldots dt_n \right| < \left(\frac{1}{\ln 2} \right)^{(1+\varepsilon)(n-k)}, \qquad (6)$$

откуда, сопоставляя это неравенство с равенством (5), получим

$$M_n \leqslant \delta^{n-k} \left(\frac{1}{\ln 2} \right)^{(1+\varepsilon)(n-k)}. \qquad (7)$$

Неравенство (3) на основании (7) перепишется так:

$$|C_n| \leqslant B_k \delta^{n-k} \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{(1+\varepsilon)(n-k)}, \tag{8}$$

где

$$B_k = \int\limits_{|\alpha_0|}^{|z|} \int\limits_{|\alpha_1|}^{|t_1|} \ldots \int\limits_{|\alpha_{k-1}|}^{|t_{k-1}|} dt_1\, dt_2 \ldots dt_k.$$

Очевидно, из неравенства (8) имеем

$$\sqrt[n]{|C_n|} \leqslant B_k^{\frac{1}{n}} \delta^{1-\frac{k}{n}} \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{(1+\varepsilon)\left(1-\frac{k}{n}\right)}. \tag{9}$$

В неравенстве (9) при n, стремящемся к бесконечности, δ стремится к нулю и поэтому имеет место соотношение

$$\lim \sqrt[n]{|C_n|} = 0.$$

Таким образом, благодаря теореме II, мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА VI. *Если α_n стремится к нулю, то радиус полноты системы функций $\{z^n e^{\alpha_n z}\}$ равен бесконечности.*

Перейдем теперь к определению радиуса полноты системы функций $\{z^n \varphi^{(n)}(z)\}$, предполагая, что функция $\varphi(z)$ регулярна внутри круга радиуса R с центром в начале координат; R — произвольная постоянная.

Для этой цели заметим, что имеет место равенство

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\rho_1} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\rho_1} \frac{1}{1+\frac{z}{t-z}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dz, \tag{10}$$

где $|z| \leqslant \rho_2$, $|t| = \rho_1$, $\rho_2 < \rho_1 < R$.

Введем обозначение

$$u = \frac{z}{t-z}; \tag{11}$$

очевидно, функция

$$w = \frac{1}{1+u} \tag{12}$$

регулярна внутри замкнутой области (D), ограниченной правой половиной окружности круга $|u| \leqslant R$ и прямой $Ru \geqslant -\frac{3}{4}$. Особая точка -1 функции w лежит вне области (D). Значит, функция w регулярна внутри области (D); поэтому, как известно, ее можно аппроксимировать при помощи полинома, иначе говоря, в этом случае имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{1+u} - P_n(u)\right| < \varepsilon, \tag{13}$$

где

$$|t| = \rho_1, \ |z| \leqslant \rho_2, \ \rho_2 < \rho_1 < R.$$

Пусть $|z| = \rho_3$, $\rho_3 < \rho_2$. Возьмем $R = \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$. Из соотношения (11) имеем

$$t = z\frac{1+u}{u}.$$

откуда

$$|t| = \rho_1 = \rho_3 \frac{|1+u|}{|u|}. \tag{14}$$

и следовательно, полагая $u=x+iy$, получаем

$$\rho_1^2(x^2+y^2)=\rho_3^2[(x+1)^2+y^2],$$

или

$$\left(x-\frac{\rho_3^2}{\rho_1^2-\rho_3^2}\right)^2+y^2=\frac{\rho_1^2\rho_3^2}{\rho_1^2-\rho_3^2}. \tag{14'}$$

Окружность (14) или, что то же самое, (14′) пересекает действительную ось в точках

$$x_1=-\frac{\rho_3}{\rho_1+\rho_3}>-\frac{1}{2},$$

$$x_2=\frac{\rho_3}{\rho_1-\rho_3}<R=\frac{\rho_2}{\rho_1-\rho_2},$$

где $\rho_3\leqslant\rho_2<\rho_1<R$. Поэтому мы можем утверждать, что окружность $|t|=\rho_1$ при $|z|\leqslant\rho_2$ и z, фиксированном с помощью отображения $u=\frac{z}{t-z}$, перейдет в окружность (14′), лежащую внутри области (D).

Пользуясь неравенством (13), мы можем переписать соотношение (10) в следующем виде:

$$\varphi(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_1}P_n\left(\frac{z}{t-z}\right)\frac{\varphi(t)}{t-z}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_1}\left[\frac{1}{1+\frac{z}{t-z}}-P_n\left(\frac{z}{t-z}\right)\right]\cdot\frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \tag{15}$$

причем

$$P_n\left(\frac{z}{t-z}\right)=\sum_{k=0}^{n}A_k\left(\frac{z}{t-z}\right)^k,$$

где числа A_k, $k=0,1,2,\ldots$, постоянные, зависящие от области (D). Следовательно, заметив, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_1}\left(\frac{z}{t-z}\right)\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\frac{z^k\varphi^{(k)}(z)}{k!},$$

равенству (15) мы можем придать следующий вид:

$$\varphi(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{k!}z^k\varphi^{(k)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_1}\left[\frac{1}{1+u}-P_n(u)\right]\frac{\varphi(t)}{t-z}dt. \tag{16}$$

На основании (13) легко заметить, что модуль интеграла в правой части последнего равенства есть величина сколь угодно малая. Обозначая этот интеграл через $R_n(z)$, окончательно будем иметь

$$\varphi(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{k!}z^k\varphi^{(k)}(z)+R_n(z), \tag{17}$$

где $|R_n(z)|$ равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Заменяя в формуле (17) $\varphi(z)$ на $\varphi^{(p)}(z)$, мы получим также

[так как $\varphi^{(p)}(z)$ регулярна в том же круге $|z| < R$], что

$$\varphi^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{k!} z^k \varphi^{(k+p)}(z) + R_{n,p}(z) \tag{18}$$

или

$$z^p \varphi^{(p)}(0) = \sum_{k=p}^{n} \frac{A_{k-p}}{(k-p)!} z^k \varphi^{(k)}(z) + z^p R_{n,p}(z). \tag{18'}$$

Полагая $\varphi^{(p)}(0) \neq 0$, из равенства (18') легко усматриваем, что любая положительная степень z аппроксимируется при помощи системы функций $\{z^n \varphi^{(n)}(z)\}$, если только $|z| < R$, где R — радиус круга C, внутри которого функция $\varphi(z)$ регулярна. Следовательно, мы можем высказать предложение:

ТЕОРЕМА VII. *Если функция $\varphi(z)$ регулярна внутри круга C радиуса R с центром в начале координат, то радиус полноты системы функций $\{z^n \varphi^{(n)}(z)\}$ равен тому же числу R, если только функция $\varphi^{(p)}(0) \neq 0$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, причем последняя является условием необходимым и достаточным.*

Поступило
21.VI.1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gelfond A., Sur les systèmes complets de fonctions analytiques, Мат. сб. 4 (46) : 1 (1938).

[2] Gelfond A., Interpolation et unicité des fonctions entières, Мат. сб., 4 (46) : 1 (1938).

[3] Gontcharoff W., Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques de la série d'Abel, Paris 1930.

I. IBRAGUIMOFF. SUR QUELQUES SYSTÈMES COMPLETS DE FONCTIONS ANALYTIQUES

RÉSUMÉ

Soit $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ une suite de fonctions régulières à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant R$. Nous dirons que ce système de fonctions $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ est complet dans le cercle $|z| \leqslant \rho$, si pour chaque fonction $f(z)$ régulière à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant \rho$, $\rho \leqslant R$ il existe une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ à coefficients constants aussi proche de $f(x)$ que l'on veut, c'est-à-dire si, quels que soient ε et δ, il existe des constantes $C_1, C_2, \ldots$ telles que

$$|f(z) - (C_1 \varphi_1(z) + \ldots + C_n \varphi_n(z))| < \varepsilon$$

pour $|z| \leqslant \rho - \delta$.

Le rayon du plus grand cercle ayant pour centre l'origine et à l'intérieur duquel notre système est complet, sera nommé rayon du système complet. Le but du présent article est de démontrer certains théorèmes sur les rayons de certains systèmes complets de fonctions analytiques:

1. Le rayon du systèmes complet

$$e^{\alpha_0 z}, \; z e^{\alpha_1 z}, \; z^2 e^{\alpha_2 z}, \dots, \quad |\alpha_k| \leqslant 1, \; k = 0, 1, 2, \dots$$

est toujours au moins égal à ln 2.

2. Le rayon du système complet

$$e^z, \; z e^{e^{\alpha i} z}, \dots, z^n e^{e^{n \alpha i} z},$$

où α est un nombre réel, est égal de module de la plus petite (en module) racine de l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n(n-1)}{2} \alpha i} z^n}{n!} = 0.$$

3. Le rayon du système complet

$$e^{\alpha_0 z}, \; z e^{\alpha_1 z}, \dots, z^n e^{\alpha_n z}, \dots; \; \lim_{n=\infty} |\alpha_n| = 0$$

est infini.

4. Si $\varphi(z)$ est régulière dans le cercle $|z| \leqslant R$ et $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, le système $\varphi(z)$, $z\varphi'(z), \dots, z^n \varphi^{(n)}(z)$ sera complet dans le même cercle $|z| \leqslant R$. La condition $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$ est nécessaire.

D'ailleurs cet article contient certaines propositions sur la convergence de la série d'interpolation d'Abel.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. С. КРОНРОД

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ В ТОЧКАХ НЕПРЕРЫВНОСТИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Исследуется структура множества точек разрыва функции, дифференцируемой в точках непрерывности. Доказывается, что необходимым и достаточным условием, накладываемым на такое множество, является условие, чтобы это множество было множеством типа F_σ и G_δ одновременно. Тот же результат получается при менее строгих требованиях, наложенных на функцию. Доказывается, что если множество точек разрыва функции не есть множество типа G_δ, функция не дифференцируема в континууме точек непрерывности.

Известно, что множество точек непрерывности любой функции есть множество типа G_δ. Далее известно, что множество точек существования производной у всякой функции есть множество типа $F_{\sigma\delta}$. Имеет смысл поставить такой вопрос: *каково множество точек разрыва функции, которая имеет конечную производную во всех точках непрерывности?* Мы поставим своей задачей отыскание условия, необходимого и достаточного для того, чтобы множество было множеством точек разрыва такой функции, т. е. функции, дифференцируемой во всех точках непрерывности. Сформулированное условие сводится к следующему:

Для того чтобы множество M было множеством точек разрыва некоторой функции, обладающей во всех точках непрерывности конечной производной, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа F_σ и G_δ одновременно.

После того как мы докажем только что сформулированное утверждение, мы покажем справедливость аналогичного предложения для функций, на которые наложены менее строгие условия, нежели требование существования конечной производной в точках непрерывности (здесь нам потребуется доказать лишь необходимость условия, так как достаточно оно уже для функций, на которые мы налагали более строгие условия).

I. Доказательство необходимости

Условие необходимости мы сформулируем так:

Пусть множества E и CE одновременно всюду плотны на некотором совершенном множестве S. Тогда не существует функции $f(x)$,*

* Через CQ мы обозначаем дополнение к множеству Q до отрезка $[0,1]$

определенной на отрезке $[0, 1]$, *разрывной в точках, принадлежащих* CE, *и обладающей конечной производной в точках, принадлежащих* E.

Равносильность этого предложения и условия необходимости в ранее сформулированном утверждении следует из того, что множество одновременно типа F_σ и G_δ не может быть вместе со своим дополнением всюду плотно на некотором совершенном множестве, и наоборот.

Прежде всего рассмотрим две вспомогательные леммы:

ЛЕММА 1. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[0, 1]$ *и пусть* E, CE *и* M *соответственно множества точек непрерывности, разрыва и дифференцируемости функции* $f(x)$. *Тогда существует функция* $F(x)$, *определенная на отрезке* $[0, 1]$, *такая, что* $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, *и что множества точек непрерывности, разрыва и дифференцируемости функций* $f(x)$ *и* $F(x)$ *совпадают.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{f(x)}{2[1 + |f(x)|]}.$$

Обозначим через $\omega(f, x)$ колебание функции $f(x)$ в точке x.

ЛЕММА 2. *Пусть функция* $f(x)$ $[0 \leqslant f(x) \leqslant 1]$ *имеет конечную производную в точке* a. *Тогда* $\lim\limits_{x \to a} \frac{\omega(f, x)}{a - x} = 0$.

Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* S — *произвольное совершенное множество, заданное на отрезке* $[0, 1]$. *Если* E *и* CE *одновременно всюду плотны на* S, *то не существует функции* $f(x)$, *определенной на* $[0, 1]$ *и такой, что* 1) $f'(a)$ *существует при* $a \subset E$, 2) $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *при* $a \subset CE$.

Доказательство. Построим систему интервалов следующим образом. Пусть точка $\alpha_1 \subset CE \cdot S$. Пусть $\omega(f, \alpha_1) = t_1$. Тогда i_1 — интервал длины не более t_1 такой, что $i_1 \supset \alpha_1$. Интервал i_2 мы выбираем так, чтобы $i_2 \subset i_1$; $i_2 \cdot S \neq 0$ и из требования $\alpha \subset i_2$ следовало $\omega(f, \alpha) \leqslant \frac{t_1}{2}$, а также чтобы i_1 и i_2 не имели общих концов. Такой интервал мы выбрать можем, так как из того, что E всюду плотно на S, следует, что множество T_1 точек с колебанием $\geqslant \frac{t_1}{2}$ нигде не плотно на S. Поэтому, в силу замкнутости T_1, найдется искомый интервал i_2.

Определим интервал i_m при любом целом m. Интервал i_{2n+1} строится так. Считая i_{2n} уже определенным, выберем внутри него точку $\alpha_{2n+1} \subset CE \cdot S$, что можно сделать, так как CE всюду плотно на S и $i_{2n} \cdot S \neq 0$. Далее выбираем интервал i_{2n+1} так, чтобы выполнялись требования: 1) $i_{2n+1} \subset i_{2n}$, 2) $\alpha_{2n+1} \subset i_{2n+1}$, 3) $|i_{2n+1}| \leqslant t_{2n+1}$, где $t_{2n+1} = \omega(f, \alpha_{2n+1})$. Совершенно очевидно, что эти требования всегда выполнимы.

Чтобы определить интервал i_{2n}, мы поступим иначе. Пусть интервал i_{2n-1} уже определен. Тогда мы выбираем интервал i_{2n} так, чтобы выполнялись требования: 1) $i_{2n} \cdot S$ не пусто, 2) $i_{2n} \subset i_{2n-1}$, 3) i_{2n} и i_{2n-1} не имеют общих концов, 4) из $\alpha \subset i_{2n}$ следует $\omega(f, \alpha) \leqslant \frac{\omega(f, \alpha_{2n-1})}{2}$.

Интервал i_{2n} выбрать можно всегда по причинам, которые были изложены выше.

Рассмотрим точку β, принадлежащую i_j при любом j. Мы имеем: 1) $\omega(f, \beta) \leqslant \frac{t_1}{2^n}$ при любом n, т. е. $\omega(f, \beta)=0$, следовательно, β — точка непрерывности; 2) $\left|\frac{\omega(f, \alpha_{2n+1})}{\alpha_{2n+1}-\beta}\right| \geqslant 1$. Следовательно, в силу леммы 2 конечной производной $f'(\beta)$ не существует. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть S, E и CE — множества, подчиняющиеся условиям предыдущей теоремы. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$ и E есть ее множество точек непрерывности. Тогда на множестве E найдется континуум точек, в которых функция $f(x)$ не дифференцируема.*

Доказательство. Процесс построения системы интервалов, указанный в предыдущей теореме, мы можем провести несколько иначе. Именно, вместо одного интервала i_1 выберем два: i_0 и i_1, каждый из которых подчиняется условиям, наложенным на интервал i_1 предыдущей теоремы, и такие, что $i_0 \cdot i_1 = 0$.

Далее, вместо одного интервала i_2 выберем четыре: i_{00}, i_{01}, i_{10} и i_{11}, причем $i_{\alpha_1\alpha_2} \cdot i_{\beta_1\beta_2} = 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = 0, 1$ и либо $\alpha_1 \neq \beta_1$, либо $\alpha_2 \neq \beta_2$), $i_{\alpha_1\alpha_2} \subset i_{\alpha_1}$ и наибольшее колебание в точке, принадлежащей $i_{\alpha_1\alpha_2}$ $[\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1]$, не превышает половины длины меньшего из интервалов i_0 и i_1.

Таким же образом, как i_0 и i_1, строим интервалы $i_{000}, i_{001}, \ldots, i_{111}$, причем $i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \subset i_{\alpha_1\alpha_2}$. Вообще $i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \subset i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$. Длина интервала ранга $2n+1$ не превышает половины наибольшего из колебаний в точках интервала ранга $2n$, содержащего данный интервал. Интервалы ранга $2n$ выбираются так, чтобы наибольшее колебание в их точках было $\leqslant \max \frac{1}{2}\omega(f, \alpha)$, где α входит в один из интервалов ранга $2n-1$.

Продолжая наш процесс бесконечно, мы получим некоторое совершенное множество, в точках второго рода которого конечной $f'(\beta)$ не существует (см. предыдущую теорему).

Теперь мы не будем требовать дифференцируемости функции $f(x)$ в точках непрерывности. Для доказательства теорем, аналогичных теоремам 1 и 2, нам достаточно, чтобы функция $f(x)$ в точках непрерывности подчинялась условию, несколько более общему, чем условие Липшица.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $\varphi(x)$ определена на полуинтервале $(0, 1]$ и $\lim\limits_{x\to 0} x\varphi(x) = 0$. Если за множества S, E и CE принять множества, определенные условиями теоремы 1, причем E и CE одновременно всюду плотны на S, то не существует функции $f(x)$ такой, что E есть ее множество точек непрерывности, и для каждого $a \subset E$ найдется такое $\delta > 0$, для которого из неравенства $|x-a| < \delta$ следует неравенство $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| < \varphi(|x-a|)$.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ существует. Рассмотрим систему интервалов, аналогичную системе интервалов

в теореме 1, но со следующими изменениями: за i_1 примем интервал, окружающий точку $\beta_1 \subset CE \cdot S$, но такой длины δ, что $\frac{\omega(f, \beta_1)}{4\delta} > \varphi\left(\frac{\delta}{2}\right)$, что всегда можно сделать, так как $\lim\limits_{\delta \to 0} \delta\varphi(\delta) = 0$.

Легко видеть, что для любой точки α этого интервала найдется другая точка β такая, что

$$\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right| > \varphi(|\alpha-\beta|). \tag{1}$$

Действительно, рассмотрим две точки $\bar{\beta}_1$ и $\underline{\beta}_1$ такие, что $f(\bar{\beta}_1) - f(\underline{\beta}_1) > \frac{\omega(f, \beta)}{2}$; тогда либо $\left|\frac{f(a)-f(\underline{\beta}_1)}{a-\underline{\beta}_1}\right| > \varphi(|a-\underline{\beta}_1|)$, либо $\left|\frac{f(a)-f(\bar{\beta}_1)}{a-\bar{\beta}_1}\right| > \varphi(|a-\bar{\beta}_1|)$, так как одна из разностей $|f(a)-f(\bar{\beta}_1)|$ или $|f(a)-f(\underline{\beta}_1)|$ больше $\frac{\omega(f, \beta_1)}{4}$ и, следовательно, так как при $|a-\bar{\beta}_1| < \delta$ и $|a-\underline{\beta}_1| < \delta$ либо $\frac{\omega(f, \beta)}{4|a-\bar{\beta}_1|} > \varphi(\delta)$, либо $\frac{\omega(f, \beta)}{4|a-\underline{\beta}_1|} > \varphi(\delta)$, утверждение (1) доказано.

Интервал i_2 мы выберем как и раньше, а интервал i_3 опять с такими же условиями, как и i_1. Вообще, интервал i_{2n+1} длины δ_{2n+1} мы будем выбирать так, чтобы $\left|\frac{\omega(f, \beta_{2n+1})}{4\delta_{2n+1}}\right| > \varphi(\delta_{2n+1})$, что возможно в силу условия $\lim\limits_{x \to 0} x\varphi(x) = 0$.

Выбирая же интервал i_{2n}, мы будем лишь заботиться о том, чтобы 1) $i_{2n} \subset i_{2n-1}$ (строго внутри), 2) из $\alpha \subset i_{2n}$ следовало $\omega(f, \alpha) \leqslant \frac{\omega(f, \beta_{2n-1})}{2}$, 3) $i_{2n} \cdot S \neq 0$, 4) длина i_{2n} не превышала половины длины интервала i_{2n-2}.

Пусть точка β принадлежит i_s при любом целом s. Так как $\omega(f, \beta) \leqslant \frac{\omega(f, \beta_1)}{2^n}$ при любом n, то β есть точка непрерывности. Рассматривая величину $\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$, где x принимает значения $\bar{\beta}_1, \underline{\beta}_1, \bar{\beta}_3, \underline{\beta}_3, \ldots, \bar{\beta}_{2n+1}, \underline{\beta}_{2n+1}, \ldots$, мы имеем при любом номере $2n+1$

$$\text{либо } \left|\frac{f(\beta)-f(\underline{\beta}_{2n+1})}{\beta-\underline{\beta}_{2n+1}}\right| > \varphi(|\beta-\underline{\beta}_{2n+1}|),$$

$$\text{либо } \left|\frac{f(\beta)-f(\bar{\beta}_{2n+1})}{\beta-\bar{\beta}_{2n+1}}\right| > \varphi(|\beta-\bar{\beta}_{2n+1}|),$$

так как мы выше показали, что это условие выполняется для всех $\beta \subset i_{2n+1}$.

Следовательно, так как длины интервалов стремятся к 0, для β не найдется такого δ, для которого из неравенства $|\beta-\alpha| < \delta$ следовало бы неравенство

$$\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \leqslant \varphi(|\beta-\alpha|).$$

Теорема доказана. Совершенно так же, как мы это делали в теореме 2, доказывается континуальность множества точек β.

Можно показать, что *для функций с множеством точек разрыва* F_σ *и* G_δ *одновременно найденная оценка порядка возрастания выражения* $\left|\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\right|$, *где* a — *точка непрерывности функции* $f(x)$, *является точной нижней границей.*

Действительно, положим, что выражение $\left|\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\right|$, где a — точка непрерывности заданной функции $f(x)$, возрастает с приближением x к a медленнее, нежели $\left|\frac{c}{a-x}\right|$, где $c\,(c \neq 0)$ — произвольная постоянная. При этом множество точек разрыва функции $f(x)$ не есть обязательно множество типа G_δ. Рассмотрим, например, функцию Римана *. Пусть a — иррациональная точка, т. е. точка непрерывности функции Римана. Тогда имеем

$$\left|\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\right| = \left|\frac{f(x)}{a-x}\right|.$$

Но $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и, следовательно, для любого $c \neq 0$ найдется такое δ, что из неравенства $|x-a| < \delta$ будет следовать неравенство $\left|\frac{f(x)}{a-x}\right| < \left|\frac{c}{a-x}\right|$, где a — данная иррациональная точка; т. е. выражение $\left|\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\right|$ возрастает медленнее, нежели $\left|\frac{c}{a-x}\right|$, где $c\,(c \neq 0)$ — любая постоянная.

Но множество точек разрыва функции Римана (множество рациональных точек) не есть множество типа F_σ и G_δ одновременно, что и доказывает наше утверждение.

II. Доказательство достаточности

Прежде всего расширим несколько понятие производной порядка n функции $f(x)$ в точке a. Мы будем говорить, что функция $f(x)$ допускает обобщенную производную порядка n в точке a, если существует такой многочлен $E_n(x)$ степени не выше n, что

$$E_n(a) = f(a) \text{ и } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-E_n(x)}{(a-x)^n} = 0.$$

В этом случае мы будем считать

$$f^{(n)}(a) = E_n^{(n)}(a).$$

Если $f^{(n)}(a)$ в обычном смысле существует, оно совпадает с нашим значением $f^{(n)}(a)$. Докажем еще одну предварительную лемму.

ЛЕММА 3. *Пусть функция* $f(x)$ $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$ *определена на отрезке* $[0, 1]$, *непрерывна в точках множества* E *и имеет производную порядка* n *(а следовательно, и все производные порядка* $m < n$*) в точках множества* M. *Пусть, далее, на отрезке* $[0, 1]$ *задана функция* $\varphi(x)$, *причем*

* Функция Римана определяется так: $f(\alpha) = 0$, если α — иррациональное число, и $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}$, если m и n натуральные взаимно простые числа

1) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, *2)* $\varphi^{(n)}(x)$ *существует в обычном смысле для всех* x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, *3)* $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi^{(m)}(0) = \varphi^{(m)}(1) = 0$ *при* $m \leqslant n$, *4)* $\varphi(x) \neq 0$ *при* $x \neq 0, 1$. *Тогда функция* $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ *обладает следующими свойствами:*

1° $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

2° *из* $a \subset M$ *следует существование* $F^{(n)}(a)$;

3° *из* $a \subset CE$ *и* $a \neq 0, 1$ *следует* $F(a) \neq \lim\limits_{x \to a} F(x)$;

4° *из* $a \subset E$ *следует* $F(a) = \lim\limits_{x \to a} F(x)$;

5° *существуют производные любого порядка* m $(m \leqslant n)$ *справа в точке* 0 *и слева в точке* 1, *причем* $F^{(m)}(0) = F^{(m)}(1) = F(0) = F(1) = 0$.

Свойства 1°, 3° и 4° очевидны; 2° также не требует доказательства, так как формула Лейбница верна для случая обобщенных производных.

Доказательство 5°. Ясно, что $F(0) = F(1) = 0$. Далее

$$\frac{F(0) - F(x)}{(0 - x)^m} = \frac{-F(x)}{x^m}.$$

Но

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \varphi(x) \text{ и } \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0.$$

Следовательно, и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(0) - F(x)}{(0 - x)^m} = 0$. Для точки 1 свойство 5° доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть множество* E *есть множество типа* F_σ *и* G_δ *одновременно. Тогда существует функция* $f(x)$, *имеющая множество* E *одновременно своим множеством точек непрерывности и множеством точек существования обобщенных производных всех порядков.*

Доказательство. В силу того что множество E есть множество типа F_σ и G_δ одновременно, мы можем исчерпать его одновременно с его дополнением процессом Бэра-Лузина*. В интервалах, принадлежащих целиком E или целиком CE, построение функции очевидно. Следовательно, доказательство нашей теоремы сводится к доказательству двух следующих пунктов.

1° Пусть на отрезке [0, 1] кроме указанного множества E заданы еще два замкнутых нигде не плотных на отрезке множества P_0 и P_1, причем точки множества P_0, попавшие в один и тот же смежный интервал множества P_1, либо все принадлежат множеству E, либо все принадлежат множеству CE. Пусть, далее, мы умеем строить функцию $\Phi(x)$ в каждом смежном интервале множества P_0 так, чтобы в этом интервале выполнялись требования теоремы. Тогда мы умеем строить в каждом смежном интервале множества P_1 такую функцию $f(x)$, что относительно нее в этом интервале выполняются требования теоремы.

* Этот процесс состоит в развертывании множества типа F_σ и G_δ одновременно (множества первого класса по терминологии Лузина) в разреженную последовательность (suite clairsemée) нигде не плотных замкнутых множеств или интервалов.

Действительно, определим функцию $f(x)$ в каждом смежном интервале множества P_1 так. Пусть функция $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1$ в каждом смежном интервале к P_0, входящем в данный смежный интервал к P_1. Далее, положим здесь $f(x) = \Phi(x) \cdot \varphi(x)$, причем

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2}},$$

где x_1 и x_2—концы данного смежного интервала к множеству P_0. В точках $\alpha \subset P_0$ мы положим $f(\alpha) = 0$, если все точки из P_0, содержащиеся в данном смежном интервале к P_1, принадлежат E; если же все они принадлежат CE, положим $f(\alpha) = 1$ при $\alpha \subset P_0$.

Внутри каждого смежного интервала множества P_0 функция $f(x)$ является искомой в силу леммы 3, так как $\Phi(x)$ являлась функцией, удовлетворяющей нашим требованиям.

Рассмотрим теперь точку α, принадлежащую P_0. Пусть $\alpha \subset CE$. Тогда $f(\alpha) = 1$. Но если мы будем приближать эту точку точками из смежных интервалов P_0 (P_0 нигде не плотно на отрезке!), то предел значений функции в этих точках есть 0, а $f(\alpha) = 1$ при $\alpha \subset P_0$, и следовательно в этой точке функция $f(x)$ терпит разрыв.

Если $\alpha \subset P_0$ и $\alpha \subset E$, мы должны рассмотреть выражение $\left|\frac{f(a) - f(x)}{(a-x)^n}\right|$, где n—любое целое число. Так как $f(\alpha) = 0$ и $f(x) \leqslant \varphi(x)$, нам достаточно показать, что

$$\lim_{x \to \alpha} \left|\frac{\varphi(x)}{(\alpha - x)^n}\right| = 0$$

при любом целом n, если $\alpha \subset P_0$. Но

$$\left|\frac{\varphi(x)}{(a-x)^n}\right| \leqslant \left|\frac{e^{-\frac{1}{(\alpha-x)^2}}}{(\alpha - x)^n}\right|,$$

так как $\varphi(x) = 0$ при $x \subset P_0$, а при $x \not\subset P_0$ $\varphi(x) \leqslant e^{-\frac{1}{(x_1-x)^2}}$, где x_1—конец смежного интервала к P_0, к которому принадлежит x, причем x_1 лежит между точками x и a. Далее

$$e^{-\frac{1}{(x_1-x)^2}} \leqslant e^{-\frac{1}{(\alpha-x)^2}},$$

так как $|x_1 - x| \leqslant |\alpha - x|$, и следовательно $\lim\limits_{x \to \alpha} \left|\frac{\varphi(x)}{(\alpha - x)^n}\right| = 0$ для любого целого n, откуда следует

$$\lim_{x \to \alpha} \left|\frac{f(\alpha) - f(x)}{(\alpha - x)^n}\right| = 0$$

при любом целом n. Утверждение 1° доказано.

2° Пусть мы имеем цепочку замкнутых множеств

$$P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_\omega \supset \ldots \supset P_\gamma \supset \ldots,$$

причем мы умеем строить функцию $\Phi(x)$ в любом смежном интервале любого из множеств P_β при $\beta < \alpha$, где α — трансфинит второго рода. Тогда мы умеем строить искомую функцию в любом смежном интервале P_α, где P_α определяется как пересечение всех P_β при $\beta < \alpha$.

Чтобы показать это, мы поступим так. Разделим смежный интервал множества P_α с концами x_1 и x_2 пополам точкой $a_{11} = a_{21}$. Каждый из интервалов $(x_1 a_{11})$ и $(x_2 a_{21})$ разделим пополам точками a_{12} и a_{22}, затем каждый из интервалов $(x_1 a_{12})$ и $(x_2 a_{22})$ разделим снова пополам точками a_{13} и a_{23} и т. д. Вообще, интервалы $(x_1 a_{1n})$ и $(x_2 a_{2n})$ делятся пополам точками $a_{1,n+1}$ и $a_{2,n+1}$.

Рассмотрим теперь каждый из интервалов $(a_{1n} a_{1,n+1})$ и $(a_{2n} a_{2,n+1})$. Так как P_α на отрезках $[a_{1n} a_{1,n+1}]$ и $[a_{2n} a_{2,n+1}]$ пусто, найдется $\beta < \alpha$ такое, что P_β пусто на нем, и следовательно каждый интервал из рассмотренной системы принадлежит некоторому смежному интервалу одного из множеств $P_1, \ldots, P_\gamma, \ldots$, где $\gamma \leqslant \beta$. Но, по предположению, мы умеем строить искомую функцию в каждом смежном интервале каждого из множеств $P_1, \ldots, P_\omega, \ldots, P_\gamma, \ldots$ при $\gamma < \alpha$. Поэтому мы умеем строить искомую функцию $\Phi(x)$ в каждом из интервалов $(a_{1n} a_{1,n+1})$ и $(a_{2n} a_{2,n+1})$ при любом целом n.

Определим теперь $f(x)$ в интервале $(a_{1n} a_{1,n+1})$ так:

$$f(x) = \Phi(x) \cdot \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{(x-a_{1n})^2} - \frac{1}{(x-a_{1,n+1})^2}}.$$

Далее, положим $f(a_{1n}) = 0$ при $a_{1n} \subset E$ и $f(a_{1n}) = 1$ при $a_{1n} \subset CE$; аналогично—для a_{2n}. Что определенная таким образом функция удовлетворяет нашим требованиям, совершенно очевидно.

Процесс Бэра-Лузина исчерпывает множества E и CE счетным числом шагов. Следовательно, мы можем указанным построением функции $f(x)$ определить ее на всем отрезке $[0, 1]$.

Мы можем усилить теорему, потребовав, например, для $\left|\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\right|$ убывания более быстрого, нежели убывание непрерывной функции $\psi(x)$, где $\psi(a) \neq 0$ при $a \neq 0$. Для этого лишь всюду вместо вспомогательной функции

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2}}$$

мы рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \left[e^{-\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2}} \right] \frac{\psi(|x-x_1|)\psi(|x-x_2|)}{2[\max|\psi(x)|]^2}.$$

Доказательство усиленной теоремы не отличается от приведенного.

* * *

Обобщение теоремы необходимости на случай функций от n переменных проводится без всяких затруднений; что же касается теоремы достаточности, то в ее доказательстве потребуются некоторые изменения.

Для перехода от замкнутого множества порядка α к замкнутому множеству порядка $\alpha+1$ в процессе исчерпывания множества E, типа F_σ и G_δ одновременно, мы пользуемся леммой 3. Однако для случая n переменных нужно доказать существование функции $0 \leqslant \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1$, обладающей в каждой точке полными дифференциалами любого порядка и обращающейся вместе со всеми своими полными дифференциалами в нуль в точках данного замкнутого множества и только в этих точках. Область, дополнительную к нашему замкнутому множеству, можно исчерпать замкнутыми n-мерными кубами, получающимися от дробления единичных целочисленных n-мерных кубов на $2^n, 2^{2n}, 2^{3n}, \ldots, 2^{mn}, \ldots$ равных n-мерных кубов. После конечного числа шагов каждый куб со стороной $\frac{1}{2^m}$ из числа содержащихся целиком внутри области Q, дополнительной к нашему замкнутому множеству, будет со всех сторон «покрыт» кубами из числа входящих в рассмотренную систему и содержащихся целиком внутри Q. Так как этих кубов будет конечное число для каждого m, построение искомой функции в каждом кубе возможно.

При проведении индукции по трансфинитам второго рода мы можем воспользоваться исчерпыванием области Q, дополнительной к данному замкнутому множеству, $n+1$ системами кубов, полученных изменением координат вершин каждого куба построенной выше системы на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$, где $\frac{\alpha_i}{\alpha_k}$ иррационально при $i \neq k$ и $i, k = 1, 2, \ldots, n+1$. В каждом кубе из этих систем, содержащемся внутри области Q, мы можем определить функцию, удовлетворяющую условиям теоремы. Достаточно рассмотреть функцию-произведение, сомножителями которого являются $n+2$ функций, $n+1$ из которых определены указанным выше образом в области Q и равны нулю в точках нашего замкнутого множества, а $n+2$-ая есть неограниченно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими полными дифференциалами в точках замкнутого множества, дополнительного к Q. При этом предполагается, что в кубах, состоящих сплошь из точек множества E, функция на первом шаге была равна нулю, а в кубах, состоящих сплошь из точек множества CE, она равняется $\frac{1}{2}[1+\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, где $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция Дирихле.

Московский гос. университет.

Поступило 3.VII.1939

A. KRONROD. SUR LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES POINTS DE DISCONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉRIVABLE EN SES POINTS DE CONTINUITÉ

RÉSUMÉ

I. Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction jouissant de la propriété suivante:

(A) Il existe une fonction $\varphi(x)$ telle que

a) $\lim\limits_{x \to 0} x\varphi(x) = 0$;

b) pour chaque point M de continuité de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il existe un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < \delta$ entraîne

$$\left| \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}} \right| < \varphi\left(\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}\right),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coordonnées du point M.

Dans ce cas l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un ensemble du type G_δ.

II. Pour les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité est du type G_δ d'ordre de grandeur de l'expression

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coordonnées d'un point arbitraire de continuité de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a pour borne supérieure exacte la valeur indiquée dans (A).

III. Si l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'est pas du type G_δ, il existe un ensemble de points ayant la puissance du continu où la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne vérifie pas la condition (A).

IV. Soit E un ensemble du type F_σ et G_δ simultanément. Alors il existe une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour laquelle E est l'ensemble des points de continuité et qui jouit au voisinage de chaque point $M \subset E$ de la propriété

$$\left| \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}} \right| < \varphi\left(\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}\right),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coordonnées du point M et $\varphi(x)$ est une fonction continue donnée telle que $\varphi(x) \geq 0$ et $\varphi(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД (ЧИСЛО ОСОБЫХ ТОЧЕК БОЛЬШЕ ТРЕХ)

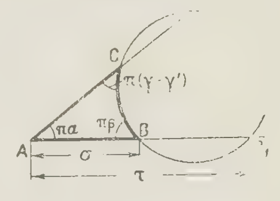
(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье рассматриваются некоторые частные случаи конформного отображения на полуплоскость многоугольников, ограниченных прямыми и дугами окружностей. Развитые общие соображения применяются к решению задачи о движении грунтовых вод в земляной плотине с наклонными откосами, лежащей на непроницаемом основании, при отсутствии воды в нижнем бьефе.

§ 1

Основная задача, рассматриваемая нами, тесно связана с задачей о конформном отображении на полуплоскость многоугольника, ограниченного дугами окружностей. Поэтому мы предварительно рассматриваем, с нужной для нас точки зрения, задачи о конформном отображении на полуплоскость кругового треугольника, четырехугольника и частного случая пятиугольника, причем мы предполагаем, что углы многоугольников отличны от нуля.

1. Треугольник. С помощью дробно-линейного преобразования круговой треугольник [с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$ и $\pi(\gamma-\gamma')$] можно перевести в треугольник с двумя прямолинейными сторонами,—треугольник ABC фиг. 1. Для того чтобы найти функцию, отображающую конформно треугольник ABC плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ на полуплоскость плоскости комплексного переменного t так, чтобы точки A, B, C перешли соответственно в точки $t=0$, $t=1$, $t=\infty$, как известно, нужно построить гипергеометрическое уравнение, для которого разность показателей фундаментальной системы решений около особой точки должна равняться углу в соответствующей вершине треугольника, деленному на π.



Фиг. 1

При этом два из показателей можно принять равными нулю, т. е. можно считать, что около $t=0$ имеем показатели $(0,\alpha)$, около $t=1$ $(0,\beta)$ и около $t=\infty$ (γ,γ'). На чертеже нам задана разность показателей γ и γ'. Соотношение Фукса

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$$

дает возможность найти каждый из показателей γ и γ'.

Гипергеометрическое уравнение задачи имеет вид

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{t} + \frac{1-\beta}{t-1}\right) Y' + \frac{\gamma\gamma'}{t(t-1)} Y = 0. \tag{1}$$

Обозначим через U, V фундаментальную систему решений этого уравнения около точки $t=0$, а именно:

$$\left.\begin{aligned} U &= 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots, \\ V &= t^\alpha (1 + a_1' t + a_2' t^2 + \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть около $t=1$ имеем систему линейно-независимых решений U_1, V_1:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= 1 + b_1 (t-1) + \ldots, \\ V_1 &= (1-t)^\beta [1 + b_1' (t-1) + \ldots]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Около $t=\infty$ пусть фундаментальная система будет

$$\left.\begin{aligned} U_\infty &= \left(\frac{1}{t}\right)^\gamma \left(1 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \ldots\right), \\ V_\infty &= \left(\frac{1}{t}\right)^{\gamma'} \left(1 + \frac{c_1'}{t} + \frac{c_2'}{t^2} + \ldots\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Функция, совершающая конформное отображение на полуплоскость любого треугольника с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi(\gamma-\gamma')$, имеет вид (около $t=0$)

$$\zeta = \frac{AU + BV}{CU + DV}, \tag{5}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Их можно определить, подставив в формулу (5) последовательно $t=0$, 1, ∞ и соответствующие координаты вершин треугольника. Мы, однако, поступим несколько иначе.

• Напишем уравнения наших прямых и окружности в следующей форме:

уравнение AB $\quad I(\zeta) = 0,$ (6)

уравнение AC $\quad I(e^{-\pi i\alpha}\zeta) = 0,$ (7)

уравнение BC $\quad I\left[\frac{e^{\pi i\beta}(\zeta-\sigma)}{\zeta-\tau}\right] = 0.$ (8)

Через I мы обозначим мнимую часть функции; σ и τ — отрезки, отсекаемые окружностью BC на оси абсцисс. [Нетрудно видеть, что (8) есть уравнение окружности с центром в точке $\left(\frac{\tau+\sigma}{2}, \frac{\tau-\sigma}{2}\operatorname{ctg}\pi\beta\right)$ и радиусом $r = \frac{\tau-\sigma}{2\sin\pi\beta}$.]

Очевидно, что для нашего треугольника в формуле (5) должно быть

$$A = D = 0.$$

Положив

$$\frac{B}{C} = \mu, \tag{9}$$

будем иметь

$$\zeta = \mu\frac{V}{U}. \tag{10}$$

Непосредственно видно, что уравнения (6) и (7) удовлетворяются, так как все ряды (2)—(4) имеют вещественные коэффициенты.

Для определения μ обратимся к уравнению (8), для чего предварительно перейдем от системы решений U, V к системе U_1, V_1 с помощью вспомогательной подстановки

$$U = pU_1 + qV_1,$$
$$V = rU_1 + sV_1.$$

Коэффициенты p, q, r, s этой подстановки вещественны. Можем написать

$$\zeta = \frac{\mu r U_1 + \mu s V_1}{pU_1 + qV_1}.$$

Если перейти с отрезка (0, 1) к отрезку $t > 1$, то там V_1 уже не будет вещественно. Можно положить

$$V_1 = e^{-\pi i \beta} V_1',$$

где V_1' вещественно при $t > 1$; тогда получим

$$\frac{e^{\pi i \beta}(\zeta - \sigma)}{\zeta - \tau} = \frac{e^{\pi i \beta}(\mu r - p\sigma) U_1 + (\mu s - q\sigma) V_1'}{(\mu r - p\tau) U_1 + (\mu s - q\tau) e^{-\pi i \beta} V_1'}.$$

Если выполняется уравнение (8), то необходимо должны выполняться одновременно равенства

$$I\,[e^{\pi i \beta}(\mu r - p\tau)(\mu r - p\sigma)] = 0,$$
$$I\,[e^{\pi i \beta}(\mu s - q\tau)(\mu s - q\sigma)] = 0,$$
$$I\,[e^{2\pi i \beta}(\mu r - p\sigma)(\mu s - q\tau)] = 0.$$

Так как $ps - qr \neq 0$, то должны выполняться одновременно равенства

$$\mu r - p\sigma = 0, \quad \mu s - q\tau = 0,$$

откуда для μ получаем два выражения:

$$\mu = \frac{q\tau}{s} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{p\sigma}{r}.$$

Для совместности этих равенств необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{ps}{qr}. \tag{11}$$

Нетрудно показать, что (11) всегда имеет место. Действительно, как известно из теории гипергеометрического уравнения (см., например, Picard, Traité d'analyse, т. III, стр. 298)

$$\frac{ps}{qr} = \frac{\sin \pi(\alpha + \gamma) \sin \pi(\beta + \gamma)}{\sin \pi\gamma \sin \pi\gamma'}.$$

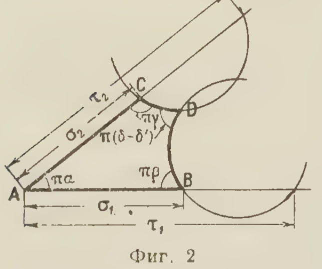
С другой стороны, для косинуса угла при вершине C имеем такое выражение:

$$\cos \pi(\gamma - \gamma') = \frac{\sigma \cos \pi(\alpha - \beta) - \tau \cos \pi(\alpha + \beta)}{\tau - \sigma}. \tag{12}$$

Решив последнее уравнение относительно $\frac{\tau}{\sigma}$, убедимся в справедливости тождества (11). Уравнение (10) дает вполне определенное, единственное, — по теореме Римана о конформном отображении, — выражение функции, отображающей треугольник ABC на верхнюю полуплоскость.

2. Четырехугольник. Аналогичным образом можно рассмотреть четырехугольник с неравными нулю углами. С помощью дробно-линейного преобразования переведем его в четырехугольник, две смеж-

ные стороны которого суть прямые. Пусть это будет четырехугольник, изображенный на фиг. 2. Напишем уравнения его сторон в форме



Фиг. 2

$$I(\zeta)=0, \tag{13}$$

$$I(e^{-\pi i\alpha}\zeta)=0, \tag{14}$$

$$I\left[\frac{e^{\pi i\beta}(\zeta-\sigma_1)}{\zeta-\tau_1}\right]=0, \tag{15}$$

$$I\left[\frac{e^{-\pi i\gamma}(e^{-\pi i\alpha}\zeta-\sigma_2)}{e^{-\pi i\alpha}\zeta-\tau_2}\right]=0. \tag{16}$$

[Окружность BD имеет координаты центра $\left(\frac{\sigma_1+\tau_1}{2}, \frac{\tau_1-\sigma_1}{2}\operatorname{ctg}\pi\beta\right)$ и радиус $\frac{\tau_1-\sigma_1}{2\sin\pi\beta}$; для окружности CD координаты центра суть

$$\left(\frac{\tau_2\sin\pi(\alpha+\gamma)-\sigma_2\sin\pi(\alpha-\gamma)}{2\sin\pi\gamma}, \frac{\sigma_2\cos\pi(\alpha-\gamma)-\tau_2\cos\pi(\alpha+\gamma)}{2\sin\pi\gamma}\right),$$

ее радиус равен $\frac{\tau_2-\sigma_2}{2\sin\pi\gamma}$.]

Для отыскания функции, дающей конформное отображение внутренности нашего четырехугольника на верхнюю полуплоскость t так, чтобы точки A, B, C, D перешли соответственно в точки $t=0$, $t=1$, $t=a$ и $t=\infty$, составим линейное дифференциальное уравнение второго порядка класса Фукса

$$Y''+\left(\frac{1-\alpha}{t}+\frac{1-\beta}{t-1}+\frac{1-\gamma}{t-a}\right)Y'+\frac{\delta\delta'(t-\lambda)}{t(t-a)(t-1)}Y=0, \tag{17}$$

аналогичное уравнению (1) для треугольника. Это уравнение определяет функцию, две ветви которой имеют около особых точек показатели, равные соответственно: $(0, \alpha)$ около $t=0$, $(0, \beta)$ около $t=1$, $(0, \gamma)$ около $t=a$ и (δ, δ') около $t=\infty$. Эти показатели должны удовлетворять соотношению Фукса

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\delta'=2.$$

Уравнение (17), в отличие от уравнения (1), кроме заданных параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta')$ содержит еще два неизвестных параметра a и λ, которые зависят как от углов данного четырехугольника, так и от других параметров, определяющих этот четырехугольник. Нам нужно получить два соотношения, могущие послужить для определения a и λ.

Фундаментальные канонические системы интегралов уравнения (17) около особых точек $t=0, 1, a, \infty$ имеют вид, аналогичный уравнениям (2)—(4). Обозначим эти интегралы соответственно через (U, V), (U_1, V_1), (U_a, V_a), (U_∞, V_∞). Коэффициенты рядов для этих функций будут теперь зависеть не только от показателей, но и от a и λ. Очевидно, что функция, отображающая конформно наш четырехугольник на полуплоскость, имеет около $t=0$ вид (10).

Рассмотрение уравнения (15) приводит нас, как и в случае треугольника, к двум выражениям для μ

$$\mu = \frac{q\tau_1}{s} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{p\sigma_1}{r}. \tag{18}$$

Для того чтобы эти выражения совпадали, необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\tau_1}{\sigma_1} = \frac{ps}{qr}, \tag{19}$$

которое, однако, теперь не является тождеством, но представляет уравнение, содержащее неизвестные a и λ. Действительно, для заданного четырехугольника $\frac{\tau_1}{\sigma_1}$ есть известное число, в то время как правая часть (18) есть функция от a и λ. Это различие между треугольником и четырехугольником связано с тем, что для треугольника фиг. 1 отношение $\frac{\tau}{\sigma}$ вполне определяется заданием углов треугольника, в то время как для четырехугольника фиг. 2 задание углов еще недостаточно для определения $\frac{\tau_1}{\sigma_1}$.

Для того чтобы получить еще одно уравнение между a и λ, обратимся к неиспользованному еще нами уравнению (16) четвертой стороны четырехугольника. Для этого перейдем от системы (U, V) решений около точки $t=0$ к системе решений (U_a, V_a) около точки $t=a$. При нашем выборе $a<0$, и отрезок $(a, 0)$ лежит влево от $t=0$. На отрезке $(a, 0)$ U остается вещественным, V имеет вид

$$V = e^{\pi i \alpha} V',$$

где V' вещественно. Поэтому вспомогательная подстановка, переводящая U, V в U_a, V_a, имеет вид

$$U = p_a U_a + q_a V_a = p_a U_a + q_a e^{\pi i \gamma} V'_a,$$
$$V = e^{\pi i \alpha}(r_a U_a + s_a V_a) = e^{\pi i \alpha}(r_a U_a + s_a e^{\pi i \gamma} V'_a),$$

где p_a, q_a, r_a, s_a вещественны. Вторые равенства для U и V относятся к значениям $t<a$, для которых V'_a вещественно. Подставим теперь написанные выражения для U и V в уравнение (16). Так как теперь

$$\zeta = \frac{\mu e^{\pi i \alpha}(r_a U_a + s_a e^{\pi i \gamma} V'_a)}{p_a U_a + q_a e^{\pi i \gamma} V'_a},$$

то уравнение (16) дает

$$I\left[\frac{e^{-\pi i \gamma}(\mu r_a - \sigma_2 p_a) U_a + (\mu s_a - \sigma_2 q_a) V'_a}{(\mu r_a - \tau_2 p_a) U_a + (\mu s_a - \tau_2 q_a) e^{\pi i \gamma} V'_a}\right] = 0.$$

Отсюда вытекает необходимость выполнения равенств

$$I\left[e^{-\pi i \gamma}(\mu r_a - \sigma_2 p_a)(\mu r_a - \tau_2 p_a)\right] = 0,$$
$$I\left[e^{-\pi i \gamma}(\mu s_a - \sigma_2 q_a)(\mu s_a - \tau_2 q_a)\right] = 0,$$
$$I\left[e^{-2\pi i \gamma}(\mu r_a - \sigma_2 p_a)(\mu s_a - \tau_2 q_a)\right] = 0.$$

Этим равенствам можно удовлетворить лишь при условии, что одновременно

$$\mu r_a - \sigma_2 p_a = 0, \quad \mu s_a - \tau_2 q_a = 0,$$

т. е. если

$$\mu = \frac{p_a \sigma_2}{r_a} = \frac{q_a \tau_2}{s_a}. \tag{20}$$

Это дает нам уравнение

$$\frac{\tau_2}{\sigma_2} = \frac{p_a s_a}{q_a r_a}, \tag{21}$$

которое вместе с (19) определяет систему двух уравнений, могущих служить для вычисления λ и a.

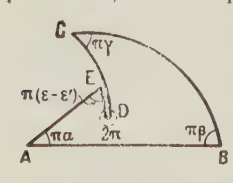
Если σ_1 или σ_2 равняется нулю, то соответствующая окружность проходит через вершину A. Если τ_1 или τ_2 равно бесконечности, то соответствующая окружность вырождается в прямую. В каждом из этих случаев один из коэффициентов промежуточной подстановки обращается в нуль (соответственно q или r, q_a или r_a) и уравнения (19) или (21) принимают более простой вид. Каждое из уравнений (19) и (21) имеет бесчисленное множество решений. В задачах о движении грунтовых вод мы можем указать промежуток, в котором заключается λ, отвечающее данному четырехугольнику.

Заметим, что в случае четырехугольника уравнение, соответствующее уравнению (12) для треугольника, имеет вид

$$\cos\pi(\delta-\delta') = \frac{\sigma_1\tau_2\cos\pi(\alpha+\beta-\gamma)+\tau_1\sigma_2\cos\pi(\alpha-\beta+\gamma)}{(\sigma_1-\tau_1)(\sigma_2-\tau_2)} +$$
$$+\frac{-\sigma_1\tau_1\cos\pi(\alpha+\beta+\gamma)-\sigma_2\tau_2\cos\pi(\alpha-\beta-\gamma)-2(\sigma_1\sigma_2+\tau_1\tau_2)\sin\pi\beta\sin\pi\gamma}{(\sigma_1-\tau_1)(\sigma_2-\tau_2)}.$$

Наличие этого уравнения соответствует тому обстоятельству, что при заданных $\frac{\tau_1}{\sigma_1}$ и $\frac{\tau_2}{\sigma_2}$ между $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ и $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ должно существовать соотношение, которое обеспечивает одинаковые значения для μ, получаемые по формулам (18) и (20).

3. Частный случай пятиугольника. Рассмотрим пятиугольник, две стороны которого имеют общую часть, образуя угол, равный 2π (на фиг. 3 это угол при вершине D). Другими словами, имеем многоугольник с надрезом. Пусть при конформном отображении этого многоугольника на полуплоскость комплексного переменного t вершины A, B, C, D, E переходят соответственно в точки вещественной оси $t = a, b, c, d, \infty$. Показатели около особых точек суть соответственно $(0, \alpha)$, $(0, \beta)$, $(0, \gamma)$, $(0, 2)$ и $(\varepsilon, \varepsilon')$. Сумма их должна удовлетворять соотношению Фукса



Фиг. 3

$$\alpha+\beta+\gamma+2+\varepsilon+\varepsilon'=3,$$

или

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon+\varepsilon'=1.$$

Дифференциальное уравнение задачи о конформном отображении нашего многоугольника имеет вид

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{t-a}+\frac{1-\beta}{t-b}+\frac{1-\gamma}{t-c}-\frac{1}{t-d}\right)Y' +$$
$$+\frac{\varepsilon\varepsilon'(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}Y = 0. \tag{22}$$

Два из четырех чисел a, b, c, d можно выбрать произвольно, приняв их, например, равными 0 и 1. Два остающихся числа вместе с числами λ_1 и λ_2 составляют четыре параметра, подлежащих определению. Уравнения сторон нашего пятиугольника имеют тот же вид, что и для четыреугольника рассмотренного нами случая, так как стороны CD и DE определяются одним и тем же уравнением. Поэтому у нас должны иметь место уравнения (19) и (21).

Третье уравнение мы получим, исходя из следующих соображений. Точка D должна быть обыкновенной точкой решения дифференциального уравнения (22), т. е. около нее фундаментальная система решений не должна содержат логарифма, и следовательно, должна иметь вид

$$U_d = 1 + a_1(t-d) + a_2(t-d)^2 + \dots,$$
$$V_d = (t-d)^2\,[1 + a_1'(t-d) + \dots]$$

(при наличии логарифма дуга CD не могла бы проходиться дважды — по CD и затем по DE).

Но тогда производные по t от этих функций также не должны содержать логарифма и должны принадлежать показателями (0, 1). Составим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $\frac{dY}{dt}$, если Y есть решение уравнения (22). Перепишем предварительно уравнение (22) в виде

$$Y'' + \left(\frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b} + \frac{C}{t-c} + \frac{D}{t-d}\right)Y' + \\ + \frac{E\,(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}\,Y = 0. \qquad (23)$$

Обозначив

$$\frac{dY}{dt} = W,$$

получим для W такое уравнение [оно может быть получено, например, путем деления (23) на коэффициент при Y и дифференцирования по t]:

$$W'' + \left(\frac{A+1}{t-a} + \frac{B+1}{t-b} + \frac{C+1}{t-c} + \frac{D+1}{t-d} - \frac{1}{t-\lambda_1} - \frac{1}{t-\lambda_2}\right)W' + \\ + \frac{Q}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)}\,W = 0, \qquad (24)$$

$$Q = E\,(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)^2 - (2t-\lambda_1-\lambda_2)\,\{A\,(t-b)(t-c)(t-d) + \\ + B\,(t-a)(t-c)(t-d) + C\,(t-a)(t-b)(t-d) + \\ + D\,(t-a)(t-b)(t-c)\} - (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\,\{(A+B)(t-c)(t-d) + \\ + (A+D)(t-b)(t-c) + (B+C)(t-a)(t-d) + \\ + (B+D)(t-a)(t-c) + (C+D)(t-a)(t-b)\}.$$

Уравнение для W имеет семь особых точек: кроме тех пяти, которые были особыми точками для Y, имеем еще особые точки λ_1 и λ_2, показатели около которых суть 0 и 2. Если показатели около $t = a, b, c, d, \infty$ были для Y равны $(0, \alpha)$, $(0, \beta)$, $(0, \gamma)$, $(0, 2)$, $(\varepsilon, \varepsilon')$, то для W они суть $(0, \alpha-1)$, $(0, \beta-1)$, $(0, \gamma-1)$, $(0, 1)$, $(\varepsilon+1, \varepsilon'+1)$. Сумма всех показателей равна пяти, как и должно быть для решения уравнения класса Фукса с семью особыми точками. Так как в нашем случае $D = -1$, то в коэффициенте при W' член с $\frac{1}{t-d}$ пропадает.

Условие, что $t = d$ должна быть обыкновенной точкой уравнения (24) (около этой точки имеем показатели 0 и 1, и ряды для W не содержат логарифма), требует, чтобы Q делилось на $t - d$. Это дает такое уравнение:

$$\varepsilon\varepsilon' (d-\lambda_1)^2 (d-\lambda_2)^2 + (2d-\lambda_1-\lambda_2)(d-a)(d-b)(d-c) + \\ + (d-\lambda_1)(d-\lambda_2)[\alpha(d-b)(d-c) + \beta(d-a)(d-c) + \\ + \gamma(d-a)(d-b)] = 0, \quad (25)$$

которое и представляет искомое третье уравнение нашей задачи.

Отметим еще, что точка $t = d$, соответствующая вершине D нашего пятиугольника, не может быть обыкновенной точкой уравнения (22) * так как около $t = d$ должно существовать решение вида

$$(t-d)^2 [1 + b(t-d) + \ldots],$$

обращающееся в нуль вместе с первой производной. Тогда из уравнения

$$Y'' + pY' + qY = 0$$

вытекало бы, что $Y'' = 0$ при $t = d$, а следовательно и все производные Y равны нулю в этой точке, т. е. было бы $Y \equiv 0$.

Уравнению (25) можно дать другой вид, если заменить параметры λ_1 и λ_2 параметрами λ и μ, которые получим, переписав уравнение (22) следующим образом:

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{t-a} + \frac{1-\beta}{t-b} + \frac{1-\gamma}{t-c} - \frac{1}{t-d}\right) Y' + \frac{\varepsilon\varepsilon' t^2 + \mu t + \lambda}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)} Y = 0.$$

Иначе говоря,

$$\lambda = \varepsilon\varepsilon' \lambda_1 \lambda_2, \quad \mu = -\varepsilon\varepsilon' (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Тогда

$$(d-\lambda_1)(d-\lambda_2) = \frac{d^2\varepsilon\varepsilon' + d\mu + \lambda}{\varepsilon\varepsilon'},$$

$$2d - \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon' d + \mu}{\varepsilon\varepsilon'}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (25), представляющее уравнение четвертой степени относительно λ_1 и λ_2, получим уравнение второй степени относительно λ и μ

$$(\varepsilon\varepsilon' d^2 + \mu d + \lambda)^2 + (2\varepsilon\varepsilon' d + \mu)(d-a)(d-b)(d-c) + \\ + (\varepsilon\varepsilon' d^2 + \mu d + \lambda)[\alpha(d-b)(d-c) + \beta(d-a)(d-c) + \\ + \gamma(d-a)(d-b)] = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) имеет еще то преимущество перед (25), что оно остается справедливым и при $\varepsilon\varepsilon' = 0$, тогда как (25) имеет в этом случае другую форму.

Таким образом, для определения четырех параметров рассматриваемой задачи мы имеем три уравнения (19), (20) и (25) или (26). Четвертое уравнение могло бы быть получено из условия, что известно положение вершины D. Однако в задаче о движении грунтовых вод в земляной плотине положение вершины D заранее неизвестно, но зато там имеется дополнительное условие, которое дает четвертое, нужное нам уравнение.

---

* Хотя она является обыкновенной точкой его решения.

§ 2

В теории плоского установившегося движения грунтовых вод приходится иметь дело с такой задачей: найти две функции Z и F комплексного переменного t, регулярные в верхней полуплоскости и имеющие конечное число регулярных особых точек на вещественной оси плоскости t, причем на каждом из отрезков, разделяемых особыми точками, имеют место два уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} &I(k_\nu Z + l_\nu F) = 0, \\ &I(m_\nu Z + n_\nu F) = 0 \quad \left(\begin{vmatrix} k_\nu & l_\nu \\ m_\nu & n_\nu \end{vmatrix} \neq 0\right), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где k_ν, l_ν, m_ν, n_ν — заданные комплексные числа. Эта задача была рассмотрена нами для случая трех особых точек [(1) и (2)]. Здесь мы рассматриваем ее для случая четырех особых точек.

D $I(k_1 Z + l_1 F) = 0$ A $I(k_2 Z + l_2 F) = 0$ B C D

$-\infty$ $I(m_1 Z + n_1 F) = 0$ $I(m_2 Z + n_2 F) = 0$

Фиг. 4

Условия на отрезках у нас выписаны на фиг. 4. В статье (2) мы показали, что фундаментальное уравнение около точки $t = a$ может быть написано в виде

$$\begin{vmatrix} k_1\lambda & l_1\lambda & k_1 & l_1 \\ m_1\lambda & n_1\lambda & m_1 & \bar{n}_1 \\ k_2 & l_2 & \bar{k}_2 & \bar{l}_2 \\ m_2 & n_2 & \bar{m}_2 & \bar{n}_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Функции Z и F представляют линейные комбинации функций U и V, принадлежащих около особой точки $t = a$ показателям α_1 и α_2, причем

$$\alpha_1 = \frac{\lg \lambda_1}{2\pi i}, \qquad \alpha_2 = \frac{\lg \lambda_2}{2\pi i}, \tag{29}$$

где λ_1 и λ_2 суть корни фундаментального уравнения. Эти показатели определяются лишь с точностью до целого слагаемого.

Очевидно a priori, что поставленная задача имеет бесчисленное множество решений. А именно, если предположить, что мы нашли некоторое ее решение $Z = Z_0$, $F = F_0$, то

1) функции AZ_0 и AF_0 при любом вещественном значении A будут также давать решение;

2) произведения $\Phi(t) Z_0$, $\Phi(t) F_0$, где $\Phi(t)$ — полином с вещественными коэффициентами, также дают решение задачи;

3) если внутри или на контуре области переменного t допустимо существование точек, в которых $\frac{Z}{F}$ или $\frac{F}{Z}$ обращается в нуль вместе со своей первой производной, то получим новые решения задачи.

Поэтому для возможности получить определенное решение задачи мы должны иметь дополнительные условия, сводящиеся к следующему:

1) должно иметься условие для определения A;

2) показатели должны отвечать условию конечности некоторых функций или должен быть известен порядок бесконечности этих функций;

3) все особые точки, в которых обращается в нуль функция $\frac{F}{Z}$ $\left(\text{или } \frac{Z}{F}\right)$ вместе с производной, должны быть заданы.

Покажем, что поставленная задача при вещественных показателях (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2) и (δ_1, δ_2) эквивалентна задаче о конформном отображении кругового четырехугольника (§ 1, п. 2), если поставлено условие об отсутствии особенностей типа 3).

Прежде всего заменим функции Z и F парой функций Z_1, F_1, положив, например,

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= k_2 Z + l_2 F, \\ F_1 &= m_2 Z + n_2 F. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Тогда на отрезке AB будем иметь

$$I(Z_1) = 0, \qquad I(F_1) = 0.$$

Очевидно, что Z_1 и F_1 должны выражаться линейно через те же функции U и V, через которые выражаются Z и F.

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= (t-a)^{\alpha_1}(b-t)^{\beta_1}(c-t)^{\gamma_1} Z_2, \\ F_1 &= (t-a)^{\alpha_1}(b-t)^{\beta_1}(c-t)^{\gamma_1} F_2. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

На отрезке AB получим для функций Z_2 и F_2 условия

$$I(Z_2) = I(F_2) = 0,$$

на остальных отрезках будем иметь условия вида (27).

Функции Z_2 и F_2 будут представляться линейными комбинациями функций U и V, принадлежащих около точек $t = a, b, c, \infty$ соответственно показателям $(0, \alpha)$, $(0, \beta)$, $(0, \gamma)$, (δ, δ'), где $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, $\beta = \beta_2 - \beta_1$, $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$, $\delta = \delta_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, $\delta' = \delta_2 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$.

Далее, нами показано в статье [2], что, умножая уравнения (27) на вещественные числа и складывая, мы можем, в случае трех особых точек, условия (27) заменить некоторой системой канонических условий. Аналогично, в случае четырех особых точек можно получить условия, написанные на соответствующих отрезках фиг. 5. Здесь σ_1,

D — $I(e^{-\pi i\alpha}F_2 - \tau_2 Z_2) = 0$ — C — $I(Z_2) = 0$ — A — $I(F_2) = 0$ — B — $I(F_2 - \tau_1 Z_2) = 0$ — D

D — $I[e^{-\pi i\gamma}(e^{-\pi i\alpha}F_2 - \sigma_2 Z_2)] = 0$ — $I(e^{-\pi i\alpha}F_2) = 0$ — $I(Z_2) = 0$ — $I[e^{\pi i\beta}(F_2 - \sigma_1 Z_2)] = 0$ — D

Фиг. 5

σ_2, τ_1, τ_2 — вещественные числа. Условия на отрезках CA и BD нами были установлены в указанной выше статье. Что касается условий на отрезке DC, то их можно получить следующим рассуждением. Если положим

$$Z_2 = Z_3, \qquad e^{-\pi i\alpha}F_2 = F_3,$$

то на отрезке CA будем иметь

$$I(Z_3) = I(F_3) = 0,$$

т. е. условия того же вида, что для Z_2 и F_2 на отрезке AB. На отрезке же DC получим условия

$$I(F_3 - \tau_2 Z_3) = I[e^{-\pi i \gamma}(F_3 - \sigma_2 Z_3)] = 0,$$

которые можно вывести совершенно так же, как условия на BD.

Покажем теперь, что задача отыскания функций Z_2 и F_2 совершенно эквивалентна задаче об отыскании функции ζ, дающей конформное отображение на полуплоскость четырехугольника п. 2 § 1.

Действительно, если положим

$$\zeta = \frac{F_2}{Z_2} \qquad (32)$$

и разделим каждое из условий, написанных на фиг. 5 над чертой, на условие, выписанное на том же отрезке под чертой, то получим уравнения (13) — (16), и таким образом сможем найти отношение $\frac{F_2}{Z_2}$, приравняв его найденному для ζ выражению. По формуле (10) будем иметь

$$\frac{F_2}{Z_2} = \mu \frac{V}{U}.$$

Тогда

$$F_2 = H\mu V, \qquad Z_2 = H\mu U, \qquad (33)$$

где H — произвольная вещественная постоянная, U и V — функции вида (2), рассматриваемые около $t = a$, в которых параметры a и λ определены по уравнениям (19) и (20). Действительно, нетрудно проверить, что F_2 и Z_2 формул (33) удовлетворяют всем условиям, выписанным на фиг. 5.

Найдя F_2 и Z_2, по формулам (31) найдем Z_1 и F_1; затем, решив уравнения (30) относительно Z и F, получим искомые функции. Пусть по (30)

$$Z = KZ_1 + LF_1,$$
$$F = MZ_1 + NF_1.$$

Тогда Z и F будут выражены через U и V так:

$$\left.\begin{aligned} Z &= (t-a)^{\alpha_1}(b-t)^{\beta_1}(c-t)^{\gamma_1}(AU+BV), \\ F &= (t-a)^{\alpha_1}(b-t)^{\beta_1}(c-t)^{\gamma_1}(CU+DV), \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где

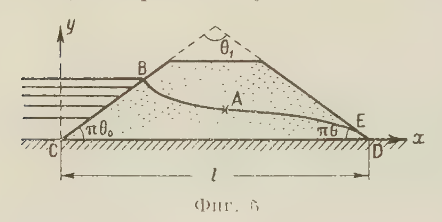
$$A = KH, \quad B = LH, \quad C = MH, \quad D = NH.$$

Формулы (34) имеют место в окрестности особой точки $t = a$. В окрестностях других особых точек нужно заменить U и V с помощью промежуточных подстановок их аналитическими продолжениями.

Если на одном из отрезков имеется точка, в которой функции U и V принадлежат по условию показателям 0 и 2, то задача об отыскании функций Z и F сводится к задаче 3 § 1.

§ 3

Применим рассуждения § 2 к решению задачи о движении грунтовых вод в призматической земляной плотине трапецоидального сечения. Для простоты будем считать, что в нижнем бьефе вода отсутствует. На фиг. 6 имеем такую плотину. CD — непроницаемое основание. Откосы составляют углы $\pi\theta_0$ и $\pi\theta$ с непроницаемым основанием.



Фиг. 6

Положим $f(z) = \varphi + i\psi$, где f - комплексный потенциал, φ — потенциал скорости, ψ — функция тока; $z = x + iy$ — комплексная координата точки области ABCDEA; A — точка перегиба на линии свободной поверхности. Представим себе, что область движения конформно отображена на верхнюю полуплоскость плоскости вспомогательного комплексного переменного t. Тогда, взяв производные по t от z и f и обозначив их через Z и F

$$Z = \frac{dz}{dt}, \quad F = \frac{df}{dt}, \tag{35}$$

получим для функций Z и F условия на отрезках вещественной оси плоскости t, показанные на фиг. 7 (мы считаем, что точки E, A, B, C, D фиг. 6 переходят в точки плоскости t, обозначенные теми же буквами *).

D $I(Ze^{\pi i\theta})=0$ E $I(F)=0$ B $I(iF)=0$ C $I(F)=0$ D

$-\infty$ $I(kZ+iF)=0$ 0 $I(kZ+iF)=0$ b $I(Ze^{-\pi i\theta_0})=0$ 1 $I(Z)=0$ ∞

Фиг. 7

Функция

$$\zeta = \frac{F}{Z} = v_x - iv_y \tag{36}$$

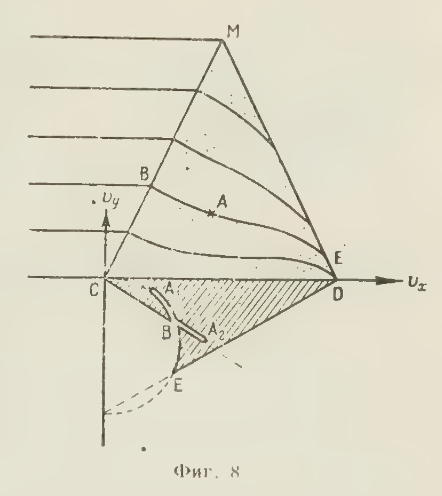
представляет комплексную скорость, v_x, v_y - проекции скорости на оси координат.

Построим годограф скорости нашего движения, т. е. область на плоскости $v_x + iv_y$, ограниченную контуром, который описывает конец вектора скорости при перемещении вдоль контура области движения. Для получения области на плоскости ζ достаточно будет полученный годограф скорости отразить в оси v_x. Для нас несущественно, какую плоскость рассматривать: $v_x - iv_y$ или $v_x + iv_y$, так как нас будут интересовать лишь величины углов получаемых многоугольников.

При построении годографа скорости будем различать три случая, в зависимости от величины угла θ_1, образованного продолжением наклонных откосов плотины.

* k—коэффициент фильтрации; см. [1, 2, 3].

I. $\theta_1 \quad \frac{\pi}{2}$. Годограф скорости изображен на фиг. 8. В верхней части чертежа изображена сама плотина (CMD), внутри которой построены линии свободной поверхности, соответствующие различным глубинам (h) воды в верхнем бьефе. При малых глубинах на свободной поверхности имеется точка перегиба. В этом случае годограф скорости изображается линией BCDEAB. При увеличении h точка A приближается к B и для некоторого значения $\frac{h}{l}$ надрез на годографе скорости пропадает, так что получаем вместо пятиугольника четырехугольник. При дальнейшем увеличении $\frac{h}{l}$ линия свободной поверхности не будет иметь точки перегиба, но годограф скорости будет опять представлять пятиугольник, с надрезом BA_2. Это соответствует тому, что на левом откосе CM появится точка, в которой скорость имеет максимальное значение. Когда вода поднимется до максимальной высоты — высоты треугольника CMD, точка A_2 придет на отрезок DE, часть чертежа BA_2E отпадет, и мы получим треугольник CDA_2, соответствующий треугольнику плотины CMD, заполненному водой.



Фиг. 8

II. $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Этот случай представлен на фиг. 9. Здесь всегда есть точка перегиба A на свободной поверхности. Она исчезает лишь с исчезновением самой свободной поверхности, т. е. при полном заполнении плотины.

III. $\theta_1 \quad \frac{\pi}{2}$. Здесь всегда есть точка перегиба. Полное заполнение треугольника CMD невозможно, т. е. всегда имеется линия свободной поверхности (фиг. 10).

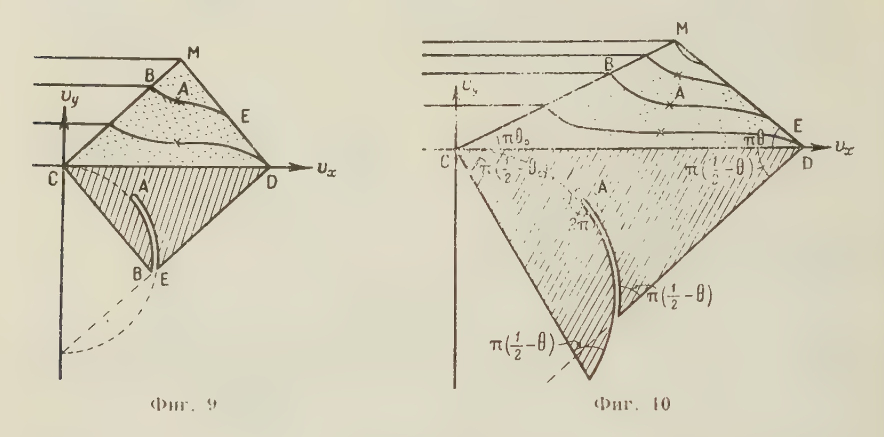
В плотинах имеем обычно случай III; экран может иметь форму I и II.

Будем предполагать для определенности, что есть точка перегиба на свободной поверхности рассматриваемой нами плотины. (Если бы в случае I мы имели точку A_2 на фиг. 7, то дифференциальное уравнение задачи было бы тем же, что и в случае наличия точки перегиба.)

С помощью фундаментального уравнения (28) найдем показатели интегралов дифференциального уравнения. Условия конечности функций

$$z = \int Z\,dt, \qquad f = \int F\,dt \tag{37}$$

во всех особых точках дают однозначное определение этих показателей. В точке $t=a$, где, как показывают фиг. 8, 9, 10, угол многоугольника равен 2π, разность показателей должна равняться 2. Условие выпол-



Фиг. 9 Фиг. 10

нения соотношения Фукса требует, чтобы эти показатели были 0 и 2. Получаем такую таблицу показателей:

t	0	a	b	1	∞
α	0	0	$-\frac{1}{2}$	θ_0-1	$\frac{3}{2}$
α'	$\frac{1}{2}-\theta$	2	$-\theta_0$	$-\frac{1}{2}$	$1+\theta$

По этим показателям нам нужно построить функцию Римана. Преобразуем эту функцию так, чтобы в точках $t=b$ и $t=1$ получить по показателю, равному нулю:

$$\tilde{Y}=P\left\{\begin{matrix} 0 & a & b & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \theta_0-1 & \frac{3}{2} & t \\ \frac{1}{2}-\theta & 2 & -\theta_0 & -\frac{1}{2} & 1+\theta & \end{matrix}\right\}=$$

$$=(t-b)^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{\theta_0-1}P\left\{\begin{matrix} 0 & a & b & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_0 & t \\ \frac{1}{2}-\theta & 2 & \frac{1}{2}-\theta_0 & \frac{1}{2}-\theta_0 & \theta+\theta_0-\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}=$$

$$=(t-b)^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{\theta_0-1}Y.$$

Последняя функция Римана удовлетворяет уравнению вида

$$Y''+\left(\frac{1-\alpha}{t-a}+\frac{1-\beta}{t-b}+\frac{1-\gamma}{t-c}+\frac{1-\delta}{t-d}\right)Y'+\frac{\varepsilon\varepsilon' t^2+\mu t+\lambda}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}Y=0,$$

где положим $a=0,\ b=a,\ c=b,\ d=1$.

$$\alpha=\frac{1}{2}-\theta,\quad \beta=2,\quad \gamma=\delta=\frac{1}{2}-\theta_0;\quad \varepsilon=\theta_0,\quad \varepsilon'=\theta+\theta_0-\frac{1}{2}.$$

Таким образом получаем уравнение

$$Y'' + \left(\frac{\frac{1}{2}+\theta}{t} + \frac{1}{t-a} + \frac{\frac{1}{2}+\theta_0}{t-b} + \frac{\frac{1}{2}+\theta_0}{t-1} \right) Y' +$$
$$+ \frac{\theta_0\left(\theta+\theta_0-\frac{1}{2}\right)t^2+\mu t+\lambda}{t(t-a)(t-b)(t-1)}\, Y = 0. \qquad (38)$$

Если в случае I имеем точку перегиба, то $0 < b < a < 1$; если точки перегиба нет, то $0 < a \leqslant b < 1$. В случаях II и III всегда $0 < b \leqslant a < 1$.

В частном случае, когда точка A совпадает с точкой B, уравнение (38) переходит в уравнение с четырьмя особыми точками

$$Y'' + \left(\frac{\frac{1}{2}+\theta}{t} + \frac{\theta_0-\frac{1}{2}}{t-b} + \frac{\frac{1}{2}+\theta_0}{t-1} \right) Y' + \frac{\theta_0\left(\theta+\theta_0-\frac{1}{2}\right)(t-\lambda_1)}{t(t-b)(t-1)}\, Y = 0, \qquad (39)$$

т. е. можно считать, что при a, стремящемся к b, параметр λ_2 уравнения (22) также стремится к b. Обозначим линейно-независимые интегралы уравнения (38) около особых точек соответственно так:

около $t=0$

$$U = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \ldots,$$
$$V = t^{\frac{1}{2}-\theta}(1 + e_1' t + \ldots);$$

около $t=a$

$$U_a = 1 + a_1(t-a) + \ldots,$$
$$V_a = (t-a)^2[1 + a_1'(t-a) + \ldots];$$

около $t=b$

$$U_b = 1 + b_1(t-b) + \ldots,$$
$$V_b = (t-b)^{\frac{1}{2}-\theta_0}[1 + b_1'(t-b) + \ldots];$$

около $t=1$

$$U_1 = 1 + c_1(t-1) + \ldots,$$
$$V_1 = (t-1)^{\frac{1}{2}-\theta_0}[1 + c_1'(t-1) + \ldots];$$

около $t=\infty$

$$U_\infty = \left(\frac{1}{t}\right)^{\theta_0}\left(1 + \frac{d_1}{t} + \frac{d_2}{t^2} + \ldots\right),$$
$$V_\infty = \left(\frac{1}{t}\right)^{\theta+\theta_0-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{d_1'}{t} + \ldots\right).$$

Коэффициенты этих рядов вещественны; функции, представляемые этими рядами, вещественны соответственно при $t>0$, $t>b$, $t>1$, $t>0$; U_a и V_a всегда вещественны.

Искомые функции Z и F представляются линейными комбинациями этих независимых интегралов, умноженными на множитель

$$(t-b)^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{\theta_0-1},$$

который был нами выделен из первоначального символа Римана.

Мы начнем с окрестности точки $t=1$, около которой Z и F выражаются особенно просто через U_1 и V_1, именно:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{AU_1}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(t-1)^{1-\theta_0}}, \\ F &= \frac{BV_1}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(t-1)^{1-\theta_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

где A и B — вещественные числа. Мы должны найти числа A и B и уравнения для параметров a, b, λ, μ. Сначала мы найдем отношение

$$\nu = \frac{B}{A}, \tag{41}$$

после чего нам нужно будет найти пять уравнений для пяти параметров

$$A,\ a,\ b,\ \lambda,\ \mu.$$

С отрезка CD фиг. 7 перейдем на отрезок BC, обойдя особую точку $t=1$ по полуокружности в положительном направлении (в верхней полуплоскости). Тогда для $b<t<1$ будем иметь

$$(t-1)^{1-\theta_0} = |t-1|^{1-\theta_0} e^{\pi i(1-\theta_0)} = -e^{-\pi i\theta_0}(1-t)^{1-\theta_0},$$

$$V_1 = e^{\pi i\left(\frac{1}{2}-\theta_0\right)} V_1' = ie^{-\pi i\theta_0} V_1',$$

где V_1' вещественно на отрезке CB. Поэтому формулы (40) для отрезка CB можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} Z &= -\frac{Ae^{\pi i\theta_0}U_1}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}, \\ F &= -\frac{BiV_1'}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Перейдем теперь от функций U_1, V_1' к функциям U_b, V_b с помощью вспомогательной подстановки

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= p_bU_b + q_bV_b, \\ V_1' &= -ie^{\pi i\theta_0}V_1 = r_bU_b + s_bV_b. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Коэффициенты p_b, q_b, r_b, s_b должны быть вещественными, так как U_1, V_1', U_b, V_b вещественны в промежутке $(b, 1)$ (или в части промежутка, где они определены). Около $t=b$ будем иметь

$$Z = -\frac{Ae^{\pi i\theta_0}(p_bU_b + q_bV_b)}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}},$$

$$F = -\frac{Bi(r_bU_b + s_bV_b)}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}.$$

Если обойти точку $t=b$ по полуокружности в верхней полуплоскости, то будем иметь для $t<b$

$$(t-b)^{\frac{1}{2}} = i(b-t)^{\frac{1}{2}},$$

$$V_b = ie^{-\pi i\theta_0}V_b',$$

где V'_b — вещественная функция при $t < b$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{Aie^{\pi i\theta_0} p_b U_b - Aq_b V'_b}{(b-t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}, \\ F &= -\frac{Br_b U_b + iBs_b e^{-\pi i\theta_0} V'_b}{(b-t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Для того чтобы на отрезке EB могло выполняться условие

$$I(F) = 0$$

(при F не равном тождественно нулю), необходимо, чтобы

$$s_b = 0. \qquad (45)$$

Это есть одно из пяти искомых уравнений. Оно соответствует уравнению (21) при $\tau_2 = 0$, так как у нас окружность BA проходит через вершину O.

Второе условие на отрезке EF перепишем так:

$$I(kZ + iF) = \frac{I\{(-Br_b i + kAie^{\pi i\theta_0} p_b) U_b - kAq_b V'_b\}}{(b-t)^{\frac{1}{2}}(t-1)^{1-\theta_0}} = 0.$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$I(iBr_b i + kAie^{\pi i\theta_0} p_b) = 0.$$

Отсюда находим ν:

$$\nu = \frac{B}{A} = \frac{kp_b}{r_b}\cos \pi\theta_0. \qquad (46)$$

Чтобы получить еще одно уравнение, перейдем с отрезка CD на отрезок DE, обойдя бесконечно далекую точку. Положим, что

$$U_1 = pU_\infty + qV_\infty,$$
$$V_1 = rU_\infty + sV_\infty.$$

При обходе вокруг точки $t = \infty$ по большой полуокружности в верхней полуплоскости будем иметь

$$(t-b)^{\frac{1}{2}} = i(b-t)^{\frac{1}{2}},$$
$$(t-1)^{1-\theta_0} = -e^{\pi i\theta_0}(1-t)^{1-\theta_0},$$
$$U_\infty = e^{-\pi i\theta_0} U'_\infty, \quad V_\infty = ie^{-\pi i(\theta+\theta_0)} V'_\infty,$$

где V'_∞ и U'_∞ вещественны на DE.

Теперь с помощью формул (40) напишем выражение Z и F для промежутка DE:

$$Z = \frac{A(piU'_\infty - qe^{-\pi i\theta} V'_\infty)}{(b-t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}},$$

$$F = \frac{\nu A(riU'_\infty - se^{-\pi i\theta} V'_\infty)}{(b-t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}.$$

Для того чтобы на DE выполнялось условие $I(Ze^{\pi i\theta}) = 0$, необходимо, чтобы

$$p = 0. \qquad (47)$$

Это есть второе необходимое для нас уравнение. Оно отвечает уравнению (19) при $\tau_1 = \infty$; у нас сторона DE представляет прямую линию.

Третьим уравнением будет выведенное раньше уравнение (26), выражающее условие того, что точка $t = a$ является кажущейся особенностью решения дифференциального уравнения (39). Мы должны положить в (26)

$$a = 0, \; b = b, \; c = 1, \; d = a,$$
$$\alpha = \frac{1}{2} - \theta, \; \beta = \gamma = \frac{1}{2} - \theta_0, \; \delta = 2,$$
$$\varepsilon = \theta_0, \; \varepsilon' = \theta + \theta_0 - \frac{1}{2}.$$

Тогда получим

$$\left[\theta_0\left(\theta + \theta_0 - \frac{1}{2}\right)a^2 + a\mu + \lambda\right]^2 + \left[2\theta_0\left(\theta + \theta_0 - \frac{1}{2}\right)a + \mu\right]a(a-b)(a-1) +$$
$$+ \left[\theta_0\left(\theta + \theta_0 - \frac{1}{2}\right)a^2 + a\mu + \lambda\right]\left[\left(\frac{1}{2} - \theta\right)(a-b)(a-1) +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} - \theta_0\right)a(2a - b - 1)\right] = 0. \tag{48}$$

Это есть третье нужное нам уравнение. Последние два уравнения получим из рассмотрения фиг. 6, на которой имеются три точки C, B и D, координаты которых нам известны. Вспоминая, что

$$z = \int_1^t Z\,dt,$$

и беря верхний предел равным соответственно b и ∞, получим

$$h(\operatorname{ctg}\pi\theta_0 + i) = A\int_1^b \frac{U_1\,dt}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(t-1)^{1-\theta_0}}, \tag{49}$$

$$l = A\int_1^\infty \frac{U_1\,dt}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(t-1)^{1-\theta_0}}. \tag{50}$$

Уравнения (45), (47), (48), (49), (50) являются уравнениями, из которых нужно найти a, b, λ, μ, A.

Для того случая, когда в плотине типа 1 точка перегиба линии свободной поверхности попадает в точку B верхового откоса, $a = b$. Поэтому три уравнения (45), (47) и (48) позволяют определить b, λ и μ, а уравнения (49) и (50) дают возможность найти то значение отношения $\frac{h}{l}$, при котором исчезает точка перегиба, а именно:

$$\frac{h}{l} = \sin\pi\theta \frac{\displaystyle\int_b^1 \frac{U_1\,dt}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}}{\displaystyle\int_1^\infty \frac{U_1\,dt}{(t-b)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{1-\theta_0}}}, \tag{51}$$

где в правой части вместо b, λ и μ должны быть подставлены найденные из системы (45)—(47), (48) значения.

Перейдем теперь к вопросу об установлении интервала, в котором должны заключаться искомые параметры.

Что касается a и b, то по нашему выбору они заключаются между нулем и единицей. Чтобы найти границы для λ и μ будем, оставляя неизменным угол $\pi\theta_0$, изменять угол $\pi\theta$, дав ему два таких крайних значения, при которых нетрудно вычислить λ и μ.

Положим, что $\theta \to 1$. Тогда в пределе получим плотину на дренированном основании (фиг. 11). Функция Римана здесь принимает вид

$$\tilde{Y} = P\begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & t \\ \frac{1}{2} & 2 & \theta_0 & \theta_0-1 & 2 & \end{pmatrix} =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}}(t-b)^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{1}{2}} P\begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}-\theta_0 & \theta_0-\frac{1}{2} & 2 & \end{pmatrix} =$$

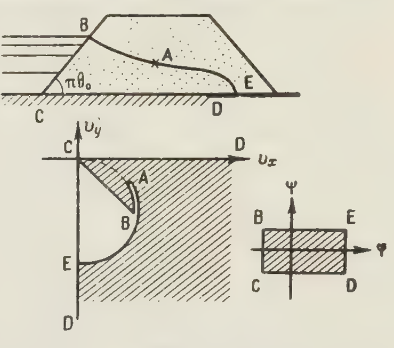
$$= \frac{W}{\sqrt{t(t-b)(t-1)}} \tag{52}$$

Мы получили функцию Римана, у которой один из показателей на бесконечности равен нулю; пусть $\varepsilon = 0$. В общем случае отсюда не следует, что в уравнении (38) λ и μ равны нулю. Но в данном случае это имеет место по следующей причине. Нетрудно построить область комплексного потенциала $f = \varphi + i\psi$: это есть прямоугольник BCDE (фиг. 11). Поэтому по формуле Кристоффеля-Шварца

$$f(t) = C\int \frac{dt}{\sqrt{t(t-b)(t-1)}} + C_1$$

или

$$F = \frac{C}{\sqrt{t(t-b)(t-1)}}.$$



Фиг. 11

Отсюда видно, что функция, которую мы в равенстве (52) обозначили через W, имеет частное решение, равное 1. Следовательно, в дифференциальном уравнении для W должен отсутствовать член с W, т. е. уравнение для W имеет вид

$$W'' + \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} - \frac{1}{t-a} + \frac{\frac{1}{2}+\theta_0}{t-b} + \frac{\frac{3}{2}-\theta_0}{t-1}\right)W' = 0.$$

Но если сравнить выражение для $\tilde{Y}$ в общем случае с выражением (52), то увидим, что W и Y связаны соотношением

$$W = t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\theta_0-\frac{1}{2}}\,Y. \tag{53}$$

Дифференцируя дважды это равенство и подставляя W' и W'' в полученное для W уравнение, будем иметь

$$Y'' + \left(\frac{\frac{3}{2}}{t} - \frac{1}{t-a} + \frac{\frac{1}{2}+\theta_0}{t-b} + \frac{\frac{1}{2}+\theta_0}{t-1}\right)Y' +$$

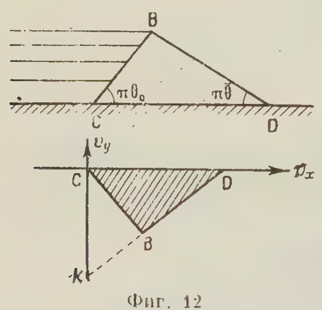
$$+\frac{\theta_0\left(\theta_0+\frac{1}{2}\right)t^2 - \left[a\left(\theta_0^2+\frac{3}{2}\theta_0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\theta_0\right)\right]t + a\theta_0\left(b+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}}{t(t-a)(t-b)(t-1)}Y = 0.$$

Отсюда видим, что при $\theta = 1$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\theta_0\right) - a\left(\theta_0^2 - \frac{3}{2}\theta_0\right), \\ \lambda &= a\theta_0\left(b+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{4}-\frac{b}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Будем теперь уменьшать угол $\pi\theta$, поворачивая откос плотины DE вокруг точки D до тех пор, пока не получим плотину, заполненную доверху водой. Обозначим полученное таким образом значение θ через θ. Величина этого угла определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg}\pi\theta + \operatorname{ctg}\pi\theta = \frac{l}{h}.$$



Фиг. 12

Если теперь угол при вершине B окажется меньше прямого, то свободная поверхность будет отсутствовать, и годограф скорости будет представлять треугольник (фиг. 12). Сравнивая оба треугольника фиг. 12, нетрудно найти показатели около точек 0, 1, ∞:

t	0	1	∞
α	$-\theta-\theta_0$	θ_0-1	$\theta+1$
α'	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Функция Римана, соответствующая этим показателям, может быть представлена так:

$$\tilde{Y} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ -\theta-\theta_0 & \theta_0-1 & \theta+1 & t \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \end{pmatrix} =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{\theta_0-1}P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ -\frac{1}{2}-\theta_0-\theta & 0 & \theta+\theta_0-\frac{1}{2} & t \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\theta_0 & \theta_0 & \end{pmatrix} =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{\theta_0-1}Y.$$

Y удовлетворяет уравнению

$$Y'' + \left(\frac{\theta_0 + \theta}{t} + \frac{\frac{1}{2} + \theta_0}{t - 1}\right) Y' - \frac{\theta_0\left(\theta_0 + \theta - \frac{1}{2}\right)}{t(t-1)} Y = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (38), видим, что оно может быть получено из последнего переходом к пределу при $a \to 0$ и $b \to 0$. При этом, как видим, оказывается, что λ и μ стремятся к нулю. Отсюда, принимая во внимание (54), получаем для λ и μ такие неравенства:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \theta_0\right) - a\left(\theta_0^2 + \frac{3}{2}\theta_0\right) < \mu < 0, \\ a\theta_0\left(b + \frac{1}{2}\right) - \frac{a}{4} - \frac{b}{2} < \lambda < 0. \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Так как относительно a и b мы знаем лишь, что они лежат между нулем и единицей, то можем переписать неравенства для λ и μ так:

$$-(\theta_0 + 1)^2 + \frac{3}{4} < \mu < 0,$$
$$\theta_0 - \frac{1}{2} < \lambda < 0.$$

Для случаев II и III эти неравенства также справедливы.

Остановимся несколько на плотине типа II (фиг. 9), где угол между откосами прямой. Здесь имеем

$$\varepsilon' = \theta + \theta_0 - \frac{1}{2},$$

и дифференциальное уравнение (38) принимает вид

$$Y'' + \left(\frac{\frac{1}{2} + \theta}{t} - \frac{1}{t - a} + \frac{1 - \theta}{t - b} + \frac{1 - \theta}{t - 1}\right) Y' + \frac{\lambda + \mu t}{t(t-a)(t-b)(t-1)} Y = 0 \quad (56)$$

или

$$Y'' + pY' + \frac{\lambda + \mu t}{q} Y = 0, \quad (56')$$

где

$$p = \frac{\frac{1}{2} + \theta}{t} - \frac{1}{t - a} + \frac{1 - \theta}{t - b} + \frac{1 - \theta}{t - 1}, \quad q = t(t-a)(t-b)(t-1).$$

Будем искать решение уравнения (56′) в виде рядов, расположенных по степеням λ и μ. Как известно ([4]), решения суть целые функции параметров λ и μ.

Положим, что искомые решения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 + U_{10}\lambda + U_{01}\mu + U_{20}\lambda^2 + U_{11}\lambda\mu + U_{02}\mu^2 + \ldots, \\ V &= V_0 + V_{10}\lambda + V_{01}\mu + V_{20}\lambda^2 + V_{11}\lambda\mu + V_{02}\mu^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Тогда нетрудно найти уравнения, которым должны удовлетворять U_0, V_0, $U_{10}, \ldots$:

$$U_0'' + pU_0' = 0, \quad U_{10}'' + pU_{10} = -\frac{U_0}{q}, \quad U_{01}'' + pU_{01}' = -\frac{tU_0}{q}. \tag{58}$$

$$V_0'' + pV_0' = 0, \quad V_{10}'' + pV_{10} = -\frac{V_0}{q}, \ldots \tag{59}$$

В качестве U_0 и V_0 выберем такие частные решения первого из уравнений (58) или (59):

$$U_0 = 1, \quad V_0 = \int_1^t \frac{(t-a)\,dt}{t^{\frac{1}{2}+\theta}(t-b)^{1-\theta}(t-1)^{1-\theta}}.$$

Тогда найдем:

$$U_{10} = \int_1^t \frac{V_0\,dt}{V_0' q} - V_0 \int_1^t \frac{dt}{V_0' q}, \quad U_{01} = \int_1^t \frac{tV_0\,dt}{V_0' q} - V_0 \int_1^t \frac{t\,dt}{V_0' q},$$

. . . .

$$U_{mn} = \int_1^t \frac{V_0(U_{m-1,n} + tU_{m,n-1})\,dt}{V_0' q} - V_0 \int_1^t \frac{U_{m-1,n} + tU_{m,n-1}}{V_0' q}\,dt,$$

. . . .

$$V_{10} = \int_1^t \frac{V_0^2\,dt}{V_0' q} - V_0 \int_1^t \frac{V_0\,dt}{V_0' q},$$

$$V_{01} = \int_1^t \frac{tV_0^2\,dt}{V_0' q} - V_0 \int_1^t \frac{tV_0\,dt}{V_0' q},$$

. . . .

$$V_{mn} = \int_1^t \frac{V_0(V_{m-1,n} + tV_{m,n-1})\,dt}{V_0' q} - V_0 \int_1^t \frac{V_{m-1,n} + tV_{m,n-1}}{V_0' q}\,dt$$

. . . .

При $m = 0$ или $n = 0$ следует считать соответственно

$$U_{\substack{m-1,\,n \\ m,\,n-1}} = 0 \quad \text{или} \quad V_{\substack{m,\,n-1 \\ m-1,\,n}} = 0.$$

Уравнения (45) и (47) здесь будут иметь вид

$$U(b)=0 \quad \text{и} \quad V(\infty)=0. \tag{60}$$

При малых значениях λ и μ, когда можно ограничиться первыми членами рядов (57), уравнения (60) вместе с уравнением (48), которое теперь примет вид

$$(a\mu+\lambda)^2+\mu a(a-b)(a-1)+(a\mu+\lambda)\Big[\Big(\frac{1}{2}-\theta\Big)(a-b)(a-1)- \\ -\theta a(a-1)-\theta a(a-b)\Big]=0, \tag{61}$$

позволяют вычислить, например, λ, μ и b при заданном a. При a близком к нулю должна получиться плотина с большой глубиной воды, причем λ и μ должны оказаться малыми. После того как b, λ и μ будут найдены, из уравнений (49) и (50) можно найти A и $\frac{h}{l}$, соответствующие заданному a.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
26. V. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Полубаринова-Кочина П. Я., Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., № 3 (1938).
[2] Полубаринова-Кочина П. Я., там же, № 3 (1939).
[3] Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б., Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, Изд. Ак. Наук СССР, 1938 (статья Девисона).
[4] Смирнов В. И., Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками, Петроград 1918 (литогр.).
[5] Schlesinger L., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 1—2, 1895—97.

P. POLOUBARINOVA-KOCHINA. AN APPLICATION OF THE THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOME PROBLEMS OF GROUND-WATER MOTION (NUMBER OF SINGULAR POINTS GREATER THAN THREE)

SUMMARY

In the present paper we consider the problem of conformal representation onto the half-plane of a quadrangle and of a particular case of a pentagon, and apply the general theory to the solution of the problem on the plane settled motion of ground waters in a dam of trapezoidal cross-section (Fig. 6); for the sake of simplicity we assume that there is no down-stream water. The complex co-ordinate z of the points of the domain of motion and the complex potential $f=\varphi+i\psi$ (φ is the velocity

potential and ψ — the stream function) may be expressed in terms of an auxiliary parameter t as follows:

$$z = A \int_1^t \frac{U_1 \, dt}{(t-b)^{\frac{1}{2}} (t-1)^{1-\theta_0}},$$

$$f = \frac{Akp_b}{r_b} \cos \pi\theta_0 \int_1^t \frac{V_1 \, dt}{(t-b)^{\frac{1}{2}} (t-1)^{1-\theta_0}},$$

where U_1, V_1 are integrals of the equation (38) depending on the parameters a, b, λ, μ. For the calculation of the magnitudes of these parameters and of the real factor A we use the system of equations (45), (47), (48), (49), (50).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

А. Е. ДОНОВ

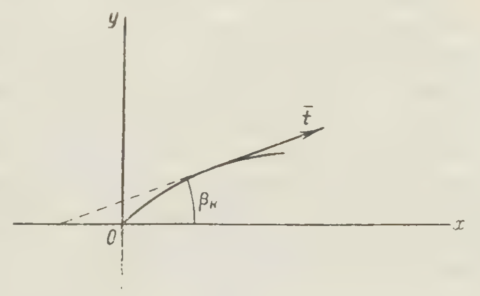
ПЛОСКОЕ КРЫЛО С ОСТРЫМИ КРОМКАМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В работе дается приближенное решение задачи обтекания при малых углах атаки тонкого крыла с острыми кромками двуразмерным, стационарным, лишенным теплопроводности сверхзвуковым потоком идеального газа (определение закона распределения давления по крылу, подъемной силы и лобового сопротивления крыла).

I

Задача исследования механического действия движущегося газа на неподвижное крыло является частным случаем несколько более общей задачи исследования механического действия движущегося газа на неподвижную твердую стенку, ограничивающую движение газа. Свое изложение мы начнем с постановки этой последней задачи, причем ограничимся рассмотрением только стационарных, двуразмерных течений идеального газа, не подверженного действию массовых сил.



Фиг. 1

На плоскости, в которой рассматривается движение газа, расположим неподвижную прямоугольную систему координат таким образом, чтобы она представлялась нам в виде, изображенном на фиг. 1. Введем в рассмотрение три функции $\bar{v}$, ρ, p от независимых переменных x, y, определяющие соответственно поле скоростей, поле плотностей и поле давлений. Векториальную функцию v будем определять двумя скалярными функциями от тех же независимых переменных. За эти функции условимся принимать либо функции v_x, v_y, определяющие соответственно проекции скорости на ось X и ось Y, либо функции v, β, определяющие соответственно модуль скорости и угол в радианах, образованный наикратчайшим поворотом от положительного направления оси X к направлению скорости. За положительное направление отсчета углов

примем направление вращения против часовой стрелки. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких течений, у которых функция β удовлетворяет условию

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Как известно, изучение рассматриваемых нами движений газа приводится к исследованию следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{aligned} & v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ & v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \\ & v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) + v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь k—показатель адиабаты исследуемого газа (для воздуха $k = 1.405$). Если движение газа ограничено неподвижной гладкой твердой стенкой, то в плоскости XOY газ будет соприкасаться с ней вдоль некоторой линии. Эту линию мы назовем «обтекаемым контуром».

Рассмотрим единичный, касательный к обтекаемому контуру вектор t, направив его таким образом, чтобы его проекция на ось X была положительна. Угол в радианах, образованный наикратчайшим поворотом от положительного направления оси X к направлению вектора t, обозначим через β_k. Ясно, что β_k может рассматриваться как функция абсциссы x той точки обтекаемого контура, через которую проводится вектор t. Эту функцию мы обозначим через $\beta_k(x)$ и предположим, что она непрерывна. Если функция $\beta_k(x)$ задана и, кроме того, известны координаты какой-нибудь точки обтекаемого контура, то форма и положение последнего вполне определяются. Условимся совмещать начало координат с крайней левой точкой обтекаемого контура. Тогда уравнение этого контура будет иметь вид

$$y = \int_0^x \operatorname{tg} \beta_k(x)\, dx. \tag{3}$$

Запишем это уравнение более коротко, обозначая его правую часть через $y_k(x)$:

$$y = y_k(x). \tag{4}$$

Так как в рассматриваемых нами течениях направление скорости на обтекаемом контуре должно совпадать с вектором $\bar{t}$, условие обтекания неподвижной твердой гладкой стенки запишется следующим образом:

$$\beta = \beta_k(x) \tag{5}$$

при $y = y_k(x)$.

Условие (5) должно быть присоединено к системе уравнений (2) в качестве пограничного условия. Имеется много работ, посвященных исследованию решения системы (2) при наличии условия (5). Из них нас будут здесь интересовать только те, в которых рассматриваются сверхзвуковые течения, т. е. такие, у которых во всякой точке, принадлежащей потоку, соблюдается условие

$$v > a, \tag{6}$$

где a — функция, определяющая поле местных скоростей звука:

$$a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}}\,. \tag{7}$$

Исследования, содержащиеся в этих работах, распадаются на два основных направления. Первое направление выражено работами, в которых решение вопроса достигается при помощи вычислительного или графического процесса, позволяющего путем постепенного перехода от точки к точке вычислять системы частных значений искомых функций (работы Буземанна, Кибеля, Франкля). Основное достоинство методов, применяющихся в этих работах, заключается в том, что при их помощи может быть разрешено большое количество практически актуальных задач, решение которых другими методами представляет большие затруднения. В частности, таким путем разрешаются краевые непотенциальные задачи. Главный же недостаток этих методов состоит в том, что решение задачи получается численное, благодаря чему не представляется возможным дать общую качественную оценку исследуемого явления. Второе направление, представленное работами Майера, Аккерета, Прандтля и Буземанна, заключается в подробной разработке теории безвихревых движений [1, 2, 3, 4]. Последняя основана на том, что в случае отсутствия вихрей дифференциальные уравнения характеристик системы (2) допускают интегрируемые комбинации. Эта теория приводит к ряду изящных точных и приближенных результатов, дающих полную качественную и количественную картину течения. Так как наши исследования находятся в тесной связи с теорией безвихревых движений, мы дадим ниже краткое изложение основных методов и результатов этой теории.

Введем в рассмотрение функцию тока ψ, определяемую следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \rho v_y,\\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= -\rho v_x.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Как известно, из соотношений (2), (7), (8) необходимо следуют соотношения

$$\frac{p}{\rho^k} = \vartheta, \tag{9}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = i_0. \tag{10}$$

где через ϑ и i_0 обозначены величины, являющиеся для одного и того же течения функциями только от ψ. При помощи уравнений (2), (9), (10) легко получить еще два уравнения

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\Omega, \tag{11}$$

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}+(a^2-v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y}-v_x v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0, \tag{12}$$

где через Ω обозначена величина, определяемая равенством

$$\Omega=\rho\left[\frac{di_0}{d\psi}-\frac{a^2}{k(k-1)}\frac{d\ln\vartheta}{d\psi}\right]. \tag{13}$$

Уравнения (11), (12) линейно связывают между собою первые частные производные по x и y от функций v_x и v_y.

Так как всякое течение, рассматриваемое нами, сверхзвуковое, то вся область, занятая течением, может быть покрыта двумя семействами характеристик. Дифференциальные уравнения этих характеристик легко выводятся при помощи уравнений (11), (12). Для одного семейства характеристик, которое мы условимся называть первым, получаются уравнения

$$dy=m_1 dx, \tag{14}$$

$$d(v\cos\beta)+m_2 d(v\sin\beta)=\Omega\frac{(a^2-v^2\cos^2\beta)m_1+v^2\sin\beta\cos\beta}{v^2\cos^2\beta-a^2}dx, \tag{15}$$

а для другого, которое мы условимся называть вторым, уравнения

$$dy=m_2 dx, \tag{16}$$

$$d(v\cos\beta)+m_1 d(v\sin\beta)=\Omega\frac{(a^2-v^2\cos^2\beta)m_2+v^2\sin\beta\cos\beta}{v^2\cos^2\beta-a^2}dx. \tag{17}$$

Здесь через m_1 и m_2 обозначены величины, определяемые следующими равенствами:

$$m_1=\frac{-v^2\sin\beta\cos\beta+a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v^2\cos^2\beta}, \tag{18}$$

$$m_2=\frac{-v^2\sin\beta\cos\beta-a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v^2\cos^2\beta}. \tag{19}$$

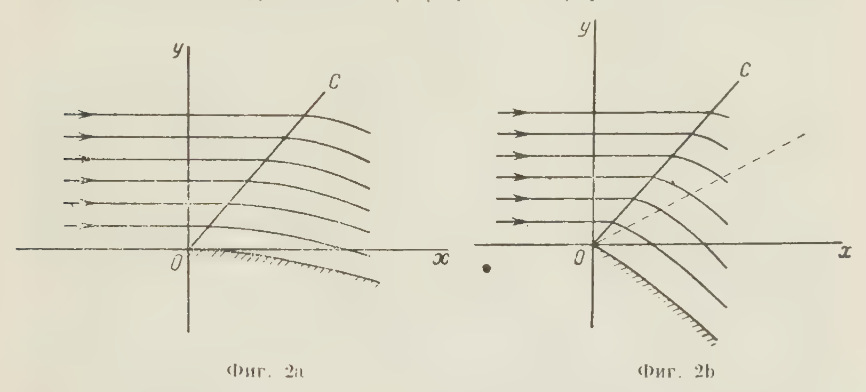
Рассмотрим теперь сверхзвуковой поток с постоянными гидродинамическими элементами (т. е. функциями v, β, ρ, p, a). Условимся называть этот поток невозмущенным потоком. Значения функций v, ρ, p, a в невозмущенном потоке обозначим соответственно через w, ρ_0, p_0, a_0, а отношение $\frac{w}{a_0}$ через M. Так как рассматриваемый поток сверхзвуковой, то $M>1$. Направление скорости невозмущенного потока примем совпадающим с направлением оси X.

Предположим, что невозмущенный поток набегает на неподвижную твердую гладкую стенку (обтекаемый контур), расположенную таким образом, что при обтекании этой стенки поток нигде от нее не отрывается и остается повсюду сверхзвуковым. При изучении течений подобного рода могут представиться два случая.

I случай. Обтекаемый контур расположен таким образом, что соблюдается условие

$$\beta_k(0) = 0. \tag{20}$$

В этом случае, как известно, образуется линия слабого разрыва OC (фиг. 2a, 2b), проходящая через начало координат O и разделяющая весь поток на две части. По одну сторону от линии слабого разрыва OC расположена область, занятая невозмущенным потоком, а по другую— область обтекания твердой гладкой стенки. В области обтекания твердой гладкой стенки гидродинамические элементы потока, вообще говоря, не постоянны, а переменны. Эту часть потока мы будем в дальнейшем называть возмущенным потоком. Во всей области, занятой рассматриваемым потоком, функции v, β, ρ, p, a непрерывны, но их частные



Фиг. 2a Фиг. 2b

производные по x и y (все или только часть) испытывают разрыв непрерывности по крайней мере на линии слабого разрыва OC. Сама линия OC является характеристикой второго семейства. Так как на этой линии гидродинамические элементы потока постоянны, то во всей области, занятой потоком, будут иметь место соотношения

$$i_0 = \frac{w^2}{2} + \frac{a_0^2}{k-1}, \tag{21}$$

$$\vartheta = \vartheta_0, \tag{22}$$

где через ϑ_0 обозначена величина, определяемая равенством

$$\vartheta_0 = \frac{p_0}{\rho_0^k}. \tag{23}$$

Из соотношений (13), (21), (22) легко находим

$$\Omega = 0, \tag{24}$$

т. е. рассматриваемое нами течение безвихревое. В силу равенства (24) правые части уравнений (15), (17) обращаются в нуль и эти уравнения удается проинтегрировать. В результате интегрирования уравнения (15) получается соотношение

$$\beta + \varphi(v) = \text{const}, \tag{25}$$

выполняющееся вдоль любой характеристики первого семейства, а в результате интегрирования уравнения (17) соотношение

$$\beta - \varphi(v) = \text{const}, \tag{26}$$

выполняющееся вдоль любой характеристики второго семейства. Через $\varphi(v)$ обозначена функция, определяемая равенством

$$\varphi(v)=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}. \tag{27}$$

Так как на линии слабого разрыва OC значения функций v и β равны соответственно w и 0, то вдоль всякой характеристики первого семейства, пересекающей эту линию, а следовательно и во всей области возмущенного потока выполняется соотношение

$$\beta+\varphi(v)=\varphi(w). \tag{28}$$

Из соотношений (16), (26), (28) непосредственно следует, что характеристики второго семейства (в том числе и линия OC) суть прямые линии, причем вдоль каждой из этих характеристик значения гидродинамических элементов постоянны.

Пользуясь этим обстоятельством, нетрудно при помощи соотношений (28), (26), (22), (21), (16), (10), (7), (5) построить в области возмущенного потока выражения для функций v, β, ρ, p, a. Впрочем, построение этих выражений не представляет большого интереса, так как главный интерес заключается в построении выражения для давления на обтекаемом контуре, что можно сделать, не пользуясь готовыми выражениями для гидродинамических элементов потока. Действительно, соотношение (28) позволяет определять в каждой точке области, занятой возмущенным потоком, скорость v в зависимости от угла наклона этой скорости к оси X. Так как в силу соотношения (5) на обтекаемом контуре угол наклона скорости к оси X есть заданная функция от x, то на этом контуре скорость также может быть определена как функция от x, и следовательно представляется возможным, пользуясь соотношениями (22), (21), (10), (9), (7), определить на обтекаемом контуре давление p как функцию от x. Если мы ограничимся рассмотрением маловозмущенного потока, т. е. потока, гидродинамические элементы которого мало отличаются от гидродинамических элементов невозмущенного потока, то выражение для давления на обтекаемом контуре может быть представлено в форме ряда. Ряд этот имеет вид

$$p=p_0+q\,[a_1\beta_k(x)+a_2\beta_k^2(x)+a_3\beta_k^3(x)+a_4\beta_k^4(x)+\ldots], \tag{29}$$

где

$$q=\frac{\rho_0 w^2}{2}=\frac{p_0 k M^2}{2},$$

$$a_1=2\,(M^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_2=(M^2-1)^{-2}\left(2-2M^2+\frac{k+1}{2}M^4\right),$$

$$a_3=(M^2-1)^{-\frac{7}{2}}\left[\frac{4}{3}-2M^2+\frac{5}{3}(k+1)M^4+\frac{5-7k+2k^2}{6}M^6-\frac{k+1}{6}M^8\right],$$

$$a_4=(M^2-1)^{-5}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}M^2+\frac{7+19k}{6}M^4+\frac{21-43k+18k^2}{12}M^6+\right.$$
$$\left.+\frac{15+20k-8k^2+3k^3}{12}M^8+\frac{-21-20k+3k^2+2k^3}{48}M^{10}+\frac{3+2k-k^2}{48}M^{12}\right).$$

. . . .

II случай. Обтекаемый контур расположен таким образом, что соблюдается условие

$$\beta_k(0) > 0. \tag{30}$$

В этом случае, как известно, образуется линия скачка уплотнения OD (фиг. 3), проходящая через начало координат O и разделяющая весь рассматриваемый поток на две части. По одну сторону от этой линии расположена область, занятая невозмущенным потоком, а по другую — область обтекания твердой гладкой стенки. Так же, как и в случае I, мы назовем поток в области обтекания твердой гладкой стенки возмущенным потоком. В рассматриваемом случае, в отличие от случая I, функции v, β, ρ, p, a испытывают разрыв непрерывности на линии скачка уплотнения OD.

Фиг. 3

В области возмущенного потока эти функции должны удовлетворять не только уравнениям (2), (5), (7), но и динамическим условиям на линии скачка уплотнения. Рассматривая мало возмущенный поток, эти условия можно представить в следующей форме:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{w^2}{2} + \frac{a_0^2}{k-1}, \tag{31}$$

$$v = w\,(1 + b_1\beta + b_2\beta^2 + b_3\beta^3 + b_4\beta^4 + \ldots), \tag{32}$$

где

$$b_1 = -(M^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$b_2 = -(M^2-1)^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{4}M^4\right),$$

$$b_3 = -(M^2-1)^{-\frac{7}{2}}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}M^2 + \frac{3}{4}(k-1)M^4 + \frac{3k^2-12k+5}{24}M^6 + \frac{(k+1)^2}{32}M^8\right],$$

$$b_4 = -(M^2-1)^{-5}\left(\frac{1}{24} + \frac{5}{8}M^2 + \frac{17+29k}{24}M^4 + \frac{-1-27k+12k^2}{24}M^6 + \frac{5+5k-k^2+k^3}{16}M^8 + \frac{5-k-3k^2+3k^3}{48}M^{10}\right)$$

. . . .

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = 1 + l_3\beta^3 + l_4\beta^4 + \ldots, \tag{33}$$

где

$$l_3 = \frac{k(k^2-1)}{12}M^6(M^2-1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$l_4 = \frac{k(k^2-1)}{12}M^6(M^2-1)^{-3}\left[4 + 2(k-2)M^2 - (k-1)M^4\right]$$

. . . .

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + e_1\beta + e_2\beta^2 + \ldots, \tag{34}$$

где

$$e_0 = (M^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$e_1 = \frac{k+1}{4}M^4(M^2-1)^{-2}$$

Условие (31) показывает, что, несмотря на наличие разрыва непрерывности функций v, β, ρ, p, a, соотношение (21), так же как и в случае I, имеет место во всей области, занятой рассматриваемым потоком. Что касается условия (22), то оно в рассматриваемом случае, вообще говоря, не будет выполнено. Однако представляется возможным говорить о приближенном выполнении этого условия. Действительно, рассмотрим соотношение (33). Его правая часть не содержит членов с первой и второй степенью β. Поэтому для мало возмущенного потока соотношение (22) можно считать приближенно выполненным на линии OD, а следовательно и во всей области, занятой рассматриваемым потоком. Отсюда следует, что в области возмущенного потока можно считать приближенно выполненным соотношение (24), а значит, и соотношения (25), (26) на характеристиках. Для значений β и v, близких соответственно к 0 и w, соотношение (28) может быть представлено в форме ряда

$$v = w\,(1 + b_1'\beta + b_2'\beta^2 + b_3'\beta^3 + b_4'\beta^4 + \ldots), \tag{35}$$

где

$$b_1' = -(M^2-1)^{-\frac{1}{2}} = b_1,$$

$$b_2' = -(M^2-1)^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{4}M^4\right) = b_2,$$

$$b_3' = -(M^2-1)^{-\frac{7}{2}}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}M^2 + \frac{3}{4}(k-1)M^4 + \frac{2k^2-5k+3}{12}M^6\right],$$

$$b_4' = -(M^2-1)^{-5}\left(\frac{1}{24} + \frac{5}{8}M^2 + \frac{17+29k}{24}M^4 + \frac{3-19k+16k^2}{24}M^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{3-2k-5k^2+4k^3}{32}M^8 + \frac{-3+8k-7k^2+2k^3}{96}M^{10}\right.$$

. . . .

Сравнивая между собой соотношения (32) и (35), мы видим, что для мало возмущенного потока первое из них может быть приближенно заменено вторым. Следовательно, для маловозмущенного потока вдоль линии OD будет приближенно выполняться соотношение (28). Так как, с другой стороны, вдоль каждой характеристики первого семейства приближенно соблюдается условие (25), то соотношение (28) будет приближенно выполняться во всей области возмущенного потока. Приближенные выражения для функций v, β, ρ, p, a строятся совершенно так же, как строятся точные выражения для этих функций в случае I. Вставив приближенное выражение для функции β в правую часть соотношения (34), мы получим дифференциальное уравнение первого порядка для приближенного определения формы линии сильного разрыва.

Подводя итог нашим рассуждениям, мы можем сказать, что точные результаты, полученные для случая I, могут служить приближенными результатами для случая II. Так, например, приближенным выражением для давления на обтекаемом контуре в случае II может служить выражение (29). При этом само собой разумеется, что не имеет никакого

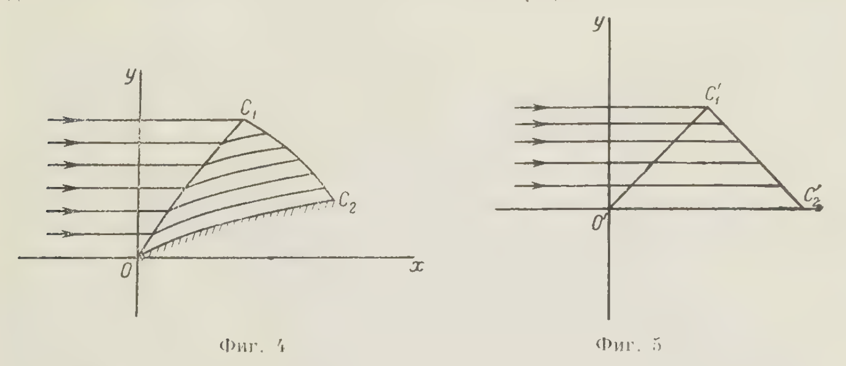
смысла учитывать в этом выражении все члены. Достаточно ограничиться первыми двумя или тремя членами рассматриваемого разложения.

Ко всему сказанному относительно случаев I и II следует добавить, что форма обтекаемого контура может быть подобрана таким образом, что будет иметь место образование скачков уплотнения внутри области обтекания твердой гладкой стенки. В тех случаях, когда наблюдается это явление, полученные нами результаты будут справедливы не для всей области обтекания твердой гладкой стенки, а лишь для ее части, прилегающей к передней стороне обтекаемого контура.

Основной задачей настоящей работы является построение приближенного выражения для давления на обтекаемом контуре в случае II, с учетом завихренности потока, обусловленной наличием скачка уплотнения OD. Дело в том, что хотя в случае наличия вихрей нельзя проинтегрировать уравнений (15), (17), однако представляется возможным составить такие комбинации дифференциальных уравнений (14), (15), (16), (17), присоединяя к этим уравнениям выражение для дифференциала функции тока, что с помощью этих комбинаций удается построить интересующее нас выражение. Исследования, относящиеся к построению последнего, составляют содержание следующей главы.

II

Пусть имеется течение, соответствующее случаю II предыдущей главы. Предположим, что в этом течении гидродинамические элементы в области возмущенного потока бесконечно мало отличаются от гидродинамических элементов в области невозмущенного потока. Уточним



Фиг. 4 Фиг. 5

несколько само понятие области возмущенного потока: под этим названием условимся подразумевать область, ограниченную криволинейным треугольником, образованным обтекаемым контуром OC_2, линией скачка уплотнения OC_1 и характеристикой первого семейства C_1C_2, исходящей из крайней задней точки обтекаемого контура (фиг. 4). Принимая во внимание соотношения (5), (14), (18), (34), нетрудно убедиться в том, что при сделанном сейчас предположении относительно гидродинамиче-

ских элементов криволинейный треугольник OC_1C_2, бесконечно мало отличается от равнобедренного прямолинейного треугольника $O'C_1'C_2'$ (фиг. 5), у которого равные стороны $O'C_1'$ и $C_1'C_2'$ соответственно параллельны характеристикам второго и первого семейств невозмущенного потока. Относительно функций $\beta_k(x)$, β, v, ρ, p, a мы предположим, что все они обладают свойствами дифференцируемости и непрерывности в той степени, в какой это необходимо для обеспечения законности операций, которые будут над этими функциями производиться. Кроме того допустим, что в рассматриваемом нами течении бесконечно малые величины $\beta_k(x)$, $\beta_k'(x)$, $\beta_k''(x)$, β, $v-w$, $\rho-\rho_0$, $p-p_0$, $a-a_0$ имеют один и тот же порядок малости. Принимая перечисленные бесконечно малые величины за основные, условимся в дальнейшем придерживаться следующей системы обозначений, фигурирующих в исследованиях бесконечно малых величин: будем обозначать через ε_m (m — некоторое целое положительное число) ту бесконечно малую величину, о которой известно, что ее порядок малости не меньше m. Ясно, что при таком способе обозначений не исключена возможность того, что разные бесконечно малые величины могут быть обозначены одним и тем же символом, и наоборот, одна и та же бесконечно малая величина может быть обозначена несколькими различными символами. Так, например, если бесконечно малая величина α обозначена через ε_4, то бесконечно малая величина 2α может быть также обозначена через ε_4 и, кроме того, бесконечно малые величины α и 2α могут быть обозначены через ε_3, ε_2, ε_1.

На любой характеристике первого или второго семейств будет выполняться соотношение

$$d\psi = \rho v (\sin\beta\, dx - \cos\beta\, dy) \tag{36}$$

в силу уравнений (8) во всей области, занятой потоком. Исключая из соотношений (14), (15), (36) dx и dy, и принимая во внимание формулы (13), (21), мы придем к соотношению

$$d(v\cos\beta) + m_2\, d(v\sin\beta) = \Phi_1\, d\ln\theta, \tag{37}$$

выполняющемуся на любой характеристике первого семейства. Здесь через Φ_1 обозначена величина, определяемая равенством

$$\Phi_1 = \frac{a^2\,[v^2\sin\beta\cos\beta - (v^2\cos^2\beta - a^2)\, m_1]}{k\,(k-1)\, v\, (v^2\cos^2\beta - a^2)\,(m_1\cos\beta - \sin\beta)}. \tag{38}$$

С другой стороны, имея интеграл (25) уравнения

$$d(v\cos\beta) + m_2\, d(v\sin\beta) = 0, \tag{39}$$

легко найти такой интегрирующий множитель L_1 этого уравнения, что после умножения на L_1 оно приведется к виду

$$d[\beta + \varphi(v)] = 0. \tag{40}$$

Для определения L_1 имеем очевидное равенство

$$L_1\,[d(v\cos\beta) + m_2\, d(v\sin\beta)] = d[\beta + \varphi(v)], \tag{41}$$

из которого без труда находим

$$L_1 (m_2 \cos\beta - \sin\beta)\, v\, d\beta = d\beta. \qquad (42)$$

Следовательно

$$L_1 = \frac{1}{v\,(m_2 \cos\beta - \sin\beta)}. \qquad (43)$$

Если теперь обе части уравнения (37) умножить на L_1, то это уравнение примет вид

$$d\,[\beta + \varphi(v)] = H_1\, d \ln \vartheta, \qquad (44)$$

где через H_1 обозначена величина, определяемая равенством

$$H_1 = \frac{(v^2 \cos^2\beta - a^2)\, m_1 - v^2 \sin\beta \cos\beta}{k\,(k-1)\, v^2}. \qquad (45)$$

Обозначим через H_{10} значение H_1 при $v = w$, $\beta = 0$. Имеем

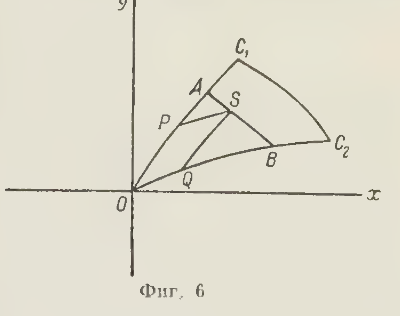
$$H_{10} = -\frac{1}{k\,(k-1)\, M^2}\,(M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}. \qquad (46)$$

Уравнение (44) преобразуем следующим образом:

$$d\,[\beta + \varphi(v)] = H_{10}\, d \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0} + (H_1 - H_{10})\, d \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0}. \qquad (47)$$

Возьмем теперь в области возмущенного потока произвольную точку S и проведем через нее характеристику первого семейства. Точку пересечения этой характеристики с линией скачка уплотнения обозначим через A (фиг. 6). Интегрируя обе части уравнения (47) вдоль проведенной характеристики от точки A до точки S, получим

$$\beta_s + \varphi(v_s) - \beta_a - \varphi(v_a) = H_{10}\left(\ln \frac{\vartheta_s}{\vartheta_0} - \ln \frac{\vartheta_a}{\vartheta_0}\right) + \int_{AS} (H_1 - H_{10})\, d \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \qquad (48)$$



Фиг. 6

где через β_s, v_s, ϑ_s обозначены соответственно значения β, v, ϑ в точке S, а через β_a, v_a, ϑ_a значения тех же величин в точке A.

Принимая во внимание соотношение (32), имеем

$$v_a = w\,(1 + b_1\beta_a + b_2\beta_a^2 + b_3\beta_a^3 + b_4\beta_a^4 + \ldots). \qquad (49)$$

Введем в рассмотрение величину v_{a1}, определяя ее при помощи разложения (35) следующим образом:

$$v_{a1} = w\,(1 + b_1\beta_a + b_2\beta_a^2 + b_3'\beta_a^3 + b_4'\beta_a^4 + \ldots). \qquad (50)$$

По самому определению величины v_{a1} имеем

$$\beta_a + \varphi(v_{a1}) = \varphi(w). \qquad (51)$$

При помощи формул (49), (50), (51) преобразуем выражение $\beta_a + \varphi(v_a)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_a + \varphi(v_a) &= \beta_a + \varphi(v_{a1}) + \varphi(v_a) - \varphi(v_{a1}) = \varphi(w) + \varphi(v_a) - \varphi(v_{a1}) = \\ &= \varphi(w) + \varphi'(w)\,[(v_a - w) - (v_{a1} - w)] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi''(w)\cdot[(v_a - w)^2 - (v_{a1} - w)^2] + \ldots = \\ &= \varphi(w) + w\varphi'(w)\,[(b_3 - b_3')\,\beta_a^3 + (b_4 - b_4')\,\beta_a^4] + \\ &\quad + w^2\varphi''(w)\, b_1\,(b_3 - b_3')\,\beta_a^4 + \varepsilon_5. \end{aligned} \qquad (52)$$

Вычисляя $\varphi'(w)$ и $\varphi''(w)$, получим:

$$\varphi'(w) = -\frac{1}{w b_1}, \tag{53}$$

$$\varphi''(w) = \frac{2b_2}{w^2 b_1^3}. \tag{54}$$

При помощи формул (52), (53), (54) легко находим

$$\beta_a + \varphi(v_a) = \varphi(w) - \frac{1}{b_1}(b_3 - b_3')\beta_a^3 + \left[\frac{2b_2}{b_1^2}(b_3 - b_3') - \frac{1}{b_1}(b_4 - b_4')\right]\beta_a^4 + \varepsilon_5. \tag{55}$$

Проведем через точку S линию тока. Точку пересечения этой линии с линией скачка уплотнения обозначим через P. Так как вдоль линии тока функция ψ постоянна, то

$$\vartheta_s = \vartheta_p, \tag{56}$$

где через ϑ_p обозначено значение ϑ в точке P. Логарифмируя обе части соотношения (33), приведем его к следующему виду:

$$\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = l_3\beta^3 + l_4'\beta^4 + l_5'\beta^5 + \ldots \tag{57}$$

Значения коэффициентов l_4', $l_5' \ldots$ нам в дальнейшем не понадобятся и поэтому мы их выписывать не будем.

Пользуясь формулами (56) и (57), легко убедиться в том, что

$$\ln\frac{\vartheta_s}{\vartheta_0} - \ln\frac{\vartheta_a}{\vartheta_0} = l_3(\beta_p^3 - \beta_a^3) + l_4'(\beta_p^4 - \beta_a^4) + \varepsilon_5, \tag{58}$$

где через β_p обозначено значение β в точке P. Предполагая, что к интегралу, стоящему в правой части соотношения (48), применима теорема о среднем значении интеграла, легко найдем *

$$\int\limits_{AS}(H_1 - H_{10})\, d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = l_3(\tilde{H}_1 - H_{10})(\beta_p^3 - \beta_a^3) + \varepsilon_5 \tag{59}$$

(при выводе этого соотношения нужно иметь в виду, что $\tilde{H}_1 - H_{10} = \varepsilon_1$). Здесь через $\tilde{H}_1$ обозначено значение H_1 в некоторой точке, расположенной на рассматриваемой характеристике между точками A и S.

Пользуясь равенствами (55), (58), (59), приведем соотношение (48) к следующему виду:

$$\beta_s + \varphi(v_s) = \varphi(w) - \frac{1}{b_1}(b_3 - b_3')\beta_a^3 + \left[\frac{2b_2}{b_1^2}(b_3 - b_3') - \frac{1}{b_1}(b_4 - b_4')\right]\beta_a^4 + \\ + H_{10}l_3(\beta_p^3 - \beta_a^3) + H_{10}l_4'(\beta_p^4 - \beta_a^4) + l_3(\tilde{H}_1 - H_{10})(\beta_p^3 - \beta_a^3) + \varepsilon_5. \tag{60}$$

Обозначим через B точку пересечения рассматриваемой характеристики первого семейства с обтекаемым контуром. Применяя формулу (60) к точке B (что возможно, так как точка S была выбрана произвольно), получим

$$\beta_b + \varphi(v_b) = \varphi(w) - \frac{1}{b_1}(b_3 - b_3')\beta_a^3 + \left[\frac{2b_2}{b_1^2}(b_3 - b_3') - \frac{1}{b_1}(b_4 - b_4')\right]\beta_a^4 + \\ + H_{10}l_3(\beta_0^3 - \beta_a^3) + H_{10}l_4'(\beta_0^4 - \beta_a^4) + l_3(\tilde{H}_1 - H_{10})(\beta_0^3 - \beta_a^3) + \varepsilon_5, \tag{61}$$

* Вместо этого предположения можно было бы принять другое, несколько более общее, допустив, что участок AS рассматриваемой характеристики может быть разбит на некоторое конечное число участков таким образом, что на каждом получившемся после разбиения участке к исследуемому интегралу применима теорема о среднем значении интеграла.

где через β_b, v_b обозначены соответственно значения β и v в точке B, а через β_0 — значение β в точке O.

Перейдем теперь к построению выражения для β_a. Из формулы (60) имеем

$$\beta_s + \varphi(v_s) = \varphi(w) + \varepsilon_3. \qquad (62)$$

Из соотношения (62), пользуясь формулой (35), получаем

$$v_s = w(1 + b_1\beta_s + b_2\beta_s^2) + \varepsilon_3. \qquad (63)$$

Обозначая через m_{2s} значение m_2 в точке S, найдем при помощи формул (19), (63)

$$m_{2s} = (M^2-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{k+1}{2}M^4(M^2-1)^{-2}\beta_s + \varepsilon_2 = e_0 + 2e_1\beta_s + \varepsilon_2. \qquad (64)$$

Аналогично тому, как было построено соотношение (47), выполняющееся на характеристиках первого семейства, может быть построено соотношение

$$d[\beta - \varphi(v)] = H_{20}\, d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0} + (H_2 - H_{20})\, d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \qquad (65)$$

выполняющееся на характеристиках второго семейства. Здесь через H_2 обозначена функция, определяемая равенством

$$H_2 = \frac{(v^2\cos^2\beta - a^2)\, m_2 - v^2\sin\beta\cos\beta}{k(k-1)\, v^2}, \qquad (66)$$

а через H_{20} — значение этой функции при $\beta = 0$, $v = w$.

Проведем через точку S характеристику второго семейства. Точку пересечения этой характеристики с обтекаемым контуром обозначим через Q. Интегрируя обе части уравнения (65) вдоль проведенной характеристики от точки Q до точки S, получим

$$\beta_s - \beta_q - [\varphi(v_s) - \varphi(v_q)] = H_{20}\left(\ln\frac{\vartheta_s}{\vartheta_0} - \ln\frac{\vartheta_q}{\vartheta_0}\right) + \int\limits_{QS}(H_2 - H_{20})\, d\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \qquad (67)$$

где через β_q, v_q, ϑ_q соответственно обозначены значения β, v, ϑ в точке Q. Так как обтекаемый контур есть линия тока, то

$$\vartheta_q = \vartheta^{(0)}, \qquad (68)$$

где через $\vartheta^{(0)}$ обозначено значение ϑ в точке O. Предполагая, что к интегралу, стоящему в правой части равенства (67), применима теорема о среднем значении интеграла, легко найдем, используя формулы (56), (57), (68),

$$\beta_s - \beta_q - [\varphi(v_s) - \varphi(v_q)] = \varepsilon_3. \qquad (69)$$

Применяя формулу (62) к точке Q, получим

$$\beta_q + \varphi(v_q) = \varphi(w) + \varepsilon_3. \qquad (70)$$

Вычитая из равенства (62) равенство (70), мы придем к следующему соотношению:

$$\beta_s - \beta_q + [\varphi(v_s) - \varphi(v_q)] = \varepsilon_3. \qquad (71)$$

Из формул (69), (71) следует

$$\beta_s = \beta_q + \varepsilon_3. \tag{72}$$

Возьмем на линии скачка уплотнения произвольную точку F (фиг. 7) и проведем через нее в области возмущенного потока характеристику второго семейства. Обозначим соответственно через β_f, m_{2f} значения β, m_2 в точке F. Применяя формулу (64) к точке F, получим

$$m_{2f} = e_0 + 2e_1\beta_f + \varepsilon_2. \tag{73}$$

Фиг. 7

Обозначим через $\left(\frac{dy}{dx}\right)_f$ угловой коэффициент касательной к линии скачка уплотнения в точке F. Из соотношения (34) следует

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_f = e_0 + e_1\beta_f + \varepsilon_2. \tag{74}$$

Сравнивая между собой формулы (73), (74), мы видим, что приведенная характеристика второго семейства и линия скачка уплотнения при пересечении друг с другом образуют бесконечно малый угол. Кроме того, если

$$\beta_f > 0, \tag{75}$$

то касательная к характеристике второго семейства, проведенная в точке F, наклонена к оси X больше, чем касательная к линии скачка уплотнения, проведенная в той же точке *.

Обозначая через L точку пересечения рассматриваемой характеристики второго семейства с обтекаемым контуром, а через x_l абсциссу этой точки, имеем

$$x_l = \varepsilon_1. \tag{76}$$

Пусть β_l обозначает значение β в точке L. Пользуясь соотношениями (5) и (76) и формулой Маклорена, получим

$$\beta_l = \beta_k(0) + \beta_k'(0)\,x_l + \varepsilon_3. \tag{77}$$

Применяя формулу (72) к точке F, находим

$$\beta_f = \beta_l + \varepsilon_3. \tag{78}$$

Из соотношений (77), (78) вытекает

$$\beta_f = \beta_k(0) + \beta_k'(0)\,x_l + \varepsilon_3. \tag{79}$$

Так как точка F была выбрана на линии скачка уплотнения совершенно произвольно, то при помощи соотношений (74), (76), (79) для

* Легко показать, что если линия скачка уплотнения не испытывает изломов и, кроме того, выполняется условие (30), то на этой линии не может иметь место неравенство $\beta < 0$. Действительно, в противном случае линия скачка уплотнения испытывала бы излом, так как при $\beta < 0$, условие (34) должно быть, в силу теоремы Цемплена, заменено условием

$$\frac{dy}{dx} = -(e_0 - e_1\beta + e_2\beta^2 - \ldots).$$

этой линии может быть получено следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + e_1\beta_k(0) + \varepsilon_2. \tag{80}$$

Следовательно, уравнение линии скачка уплотнения может быть представлено в такой форме:

$$y = [e_0 + e_1\beta_k(0)]\,x + \varepsilon_2. \tag{81}$$

Применяя формулы (64) и (72) к любой точке, расположенной на характеристике второго семейства FL, легко найдем дифференциальное уравнение этой линии в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + 2e_1\beta_l + \varepsilon_2. \tag{82}$$

Пользуясь формулами (76) и (77), это уравнение можно записать так:

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + 2e_1\beta_k(0) + \varepsilon_2. \tag{83}$$

Следовательно, уравнение характеристики FL может быть представлено в форме

$$y = y_l + [e_0 + 2e_1\beta_k(0)]\,(x - x_l) + \varepsilon_2, \tag{84}$$

где через y_l обозначена ордината точки L.

С другой стороны, принимая во внимание формулы (3) и (76), имеем

$$y_l = \int\limits_0^{x_l} \operatorname{tg}\beta_k(x)\,dx = \varepsilon_2. \tag{85}$$

Пользуясь формулами (85) и (76), приведем уравнение (84) к виду

$$y = [e_0 + 2e_1\beta_k(0)]\,x - e_0x_l + \varepsilon_2. \tag{86}$$

Применяя формулы (81) и (86) к точке F и обозначая через x_f, y_f координаты этой точки, получим

$$\left.\begin{aligned} y_f &= [e_0 + e_1\beta_k(0)]\,x_f + \varepsilon_2,\\ y_f &= [e_0 + 2e_1\beta_k(0)]\,x_f - e_0x_l + \varepsilon_2. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Из соотношений (87) легко находим

$$x_l = \frac{e_1}{e_0}\,x_f\beta_k(0) + \varepsilon_2. \tag{88}$$

Подставляя в правую часть равенства (79) вместо x_l его выражение из формулы (88), получим

$$\beta_f = \beta_k(0) + \frac{e_1}{e_0}\,x_f\beta_k(0)\,\beta_k'(0) + \varepsilon_3. \tag{89}$$

Обозначим через x_a, y_a координаты точки A, а через x_b, y_b координаты точки B. Применяя формулу (89) к точке A, придем к следующему результату:

$$\beta_a = \beta_k(0) + \frac{e_1}{e_0}\,x_a\beta_k(0)\,\beta_k'(0) + \varepsilon_3. \tag{90}$$

Выразим x_a через x_b. С этой целью напишем, пользуясь формулами (14) и (18), дифференциальное уравнение характеристики первого семейства следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -e_0 + \varepsilon_1. \tag{91}$$

Пользуясь формулой (91), представим уравнение характеристики первого семейства AB в таком виде:

$$y = y_b - e_0 (x - x_b) + \varepsilon_1. \tag{92}$$

Принимая во внимание формулу (3), имеем

$$y_b = \int_0^{x_b} \operatorname{tg} \beta_k (x)\, dx = \varepsilon_1. \tag{93}$$

Следовательно, уравнение (92) можно записать так:

$$y = -e_0 (x - x_b) + \varepsilon_1. \tag{94}$$

С другой стороны, уравнение (81) линии скачка уплотнения можно представить в форме

$$y = e_0 x + \varepsilon_1. \tag{95}$$

Применяя формулы (94) и (95) к точке A, получим

$$\left.\begin{aligned} y_a &= -e_0 (x_a - x_b) + \varepsilon_1, \\ y_a &= e_0 x_a + \varepsilon_1. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Из уравнений (96) легко находим

$$x_a = \frac{x_b}{2} + \varepsilon_1. \tag{97}$$

Следовательно,

$$\beta_a = \beta_k (0) + \frac{e_1}{2e_0} x_b \beta_k (0)\, \beta_k' (0) + \varepsilon_3. \tag{98}$$

Вставляя найденное выражение для β_a в правую часть соотношения (61) и заменяя в этом соотношении, на основании формулы (5), β_0 на $\beta_k (0)$, получим

$$\beta_b + \varphi (v_b) = \varphi (w) - \frac{1}{b_1} (b_3 - b_3') \beta_k^3 (0) - \left[\frac{1}{b_1} (b_4 - b_4') - \frac{2b_2}{b_1^2} (b_3 - b_3') \right] \beta_k^4 (0) - \\ - \frac{3e_1}{2e_0} \left[\frac{b_3 - b_3'}{b_1} + H_{10} l_3 \right] x_b \beta_k^3 (0)\, \beta_k' (0) + \varepsilon_5. \tag{99}$$

Пользуясь разложением (35), из соотношения (99) легко находим

$$v_b = w \Big\{ 1 + b_1 \beta_b + b_2 \beta_b^2 + b_3' \beta_b^3 + b_4' \beta_b^4 + (b_3 - b_3') \beta_k^3 (0) + \\ + \left[b_4 - b_4' - \frac{2b_2}{b_1} (b_3 - b_3') \right] \beta_k^4 (0) + \frac{2b_2}{b_1} (b_3 - b_3') \beta_k^3 (0) \beta_b + \\ + \frac{3e_1}{2e_0} [b_3 - b_3' + H_{10} l_3 b_1] x_b \beta_k^3 (0) \beta_k' (0) \Big\} + \varepsilon_5. \tag{100}$$

Заменяя в формуле (100) v_b, β_b, x_b соответственно на v, $\beta_k (x)$, x, мы

придем к следующему окончательному выражению для скорости на обтекаемом контуре:

$$v = w\Big\{1 + b_1\beta_k(x) + b_2\beta_k^2(x) + b_3'\beta_k^3(x) + b_4'\beta_k^4(x) + (b_3 - b_3')\beta_k^3(0) + \\ + \Big[b_4 - b_4' - \frac{2b_2}{b_1}(b_3 - b_3')\Big]\beta_k^4(0) + \frac{2b_2}{b_1}(b_3 - b_3')\beta_k^3(0)\beta_k(x) + \\ + \frac{3e_1}{2e_0}[b_3 - b_3' + H_{10}l_3b_1]\,x\beta_k^3(0)\beta_k'(0)\Big\} + \varepsilon_5. \quad (101)$$

Перейдем теперь к выводу формулы, позволяющей вычислять давление на обтекаемом контуре. Ясно, что

$$a_0^2 = k\frac{p_0}{\rho_0}. \quad (102)$$

Кроме того на обтекаемом контуре имеет место соотношение

$$\frac{p}{\rho^k} = \vartheta^{(0)}. \quad (103)$$

Пользуясь формулами (7), (10), (21), (23), (102), (103), легко получим следующее выражение для давления на обтекаемом контуре:

$$p = p_0\left[\frac{\vartheta^{(0)}}{\vartheta_0}\right]^{-\frac{1}{k-1}}\left[1 - \frac{k-1}{2}M^2\left(\frac{v^2}{w^2} - 1\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}. \quad (104)$$

С другой стороны, в силу условий (5), (33), выполняется соотношение

$$\frac{\vartheta^{(0)}}{\vartheta_0} = 1 + l_3\beta_k^3(0) + l_4\beta_k^4(0) + \ldots \quad (105)$$

Вставляя в правую часть формулы (104) вместо v и $\frac{\vartheta^{(0)}}{\vartheta_0}$ их выражения, взятые соответственно из формул (101), (105), мы получим после элементарных преобразований искомую формулу для вычисления давления на обтекаемом контуре:

$$p = p_0 + q\Big[a_1\beta_k(x) + a_2\beta_k^2(x) + a_3\beta_k^3(x) + a_4\beta_k^4(x) + \\ + a_{1d}\beta_k^3(0) + a_{2d}\beta_k^4(0) + a_{3d}\beta_k^3(0)\beta_k(x) + a_{4d}\beta_k^3(0)\beta_k'(0)\,x\Big] + \varepsilon_5, \quad (106)$$

где

$$a_{1d} = -2(b_3 - b_3') - \frac{2l_3}{k(k-1)M^2} = \\ = \frac{k+1}{2}M^4(M^2-1)^{-\frac{7}{2}}\left(-\frac{1}{3} + \frac{3-k}{6}M^2 + \frac{3k-5}{24}M^4\right);$$

$$a_{2d} = -2(b_4 - b_4') + \frac{4b_2}{b_1}(b_3 - b_3') - \frac{2l_4}{k(k-1)M^2} = \\ = M^4(M^2-1)^{-5}\Big(-\frac{k+1}{2} + \frac{5+3k-2k^2}{4}M^2 + \frac{-10-3k+6k^2-k^3}{8}M^4 + \\ + \frac{9-7k^2+2k^3}{16}M^6 + \frac{-3+k+3k^2-k^3}{32}M^8\Big);$$

$$a_{3d} = (b_3 - b_3')\left(2M^2b_1 - 2b_1 - \frac{4b_2}{b_1}\right) + \frac{2l_3b_1}{k-1} = M^6(M^2-1)^{-5}\Big(-\frac{k+1}{6} + \\ + \frac{7+2k-5k^2}{24}M^2 + \frac{-4+3k+6k^2-k^3}{24}M^4 + \frac{3-7k-7k^2+3k^3}{96}M^6\Big);$$

$$a_{4d} = -\frac{3e_1}{e_0}(b_3 - b_3' + H_{10}l_3b_1) = \\ = \frac{(k+1)^2}{16}M^8(M^2-1)^{-5}\left(-1 + \frac{3-k}{2}M^2 + \frac{3k-5}{8}M^4\right).$$

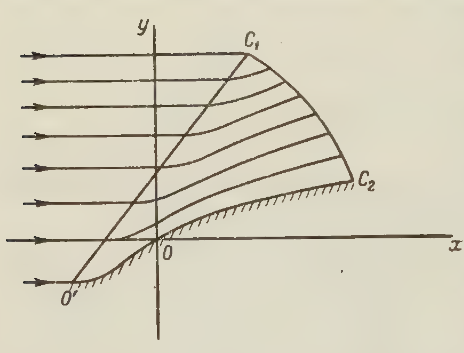
При $x=0$ формула (106) принимает вид

$$p=p_0+q\left[a_1\beta_k(0)+a_2\beta_k^2(0)+a_3'\beta^3(0)+a_4'\beta_k^4(0)\right]+\varepsilon_5, \tag{107}$$

где $a_3'=a_3+a_{1d}$, $a_4'=a_4+a_{2d}+a_{3d}$.

Формула (107) может быть использована для вычисления давления на плоской пластинке, составляющей с невозмущенным потоком угол, равный $\beta_k(0)$.

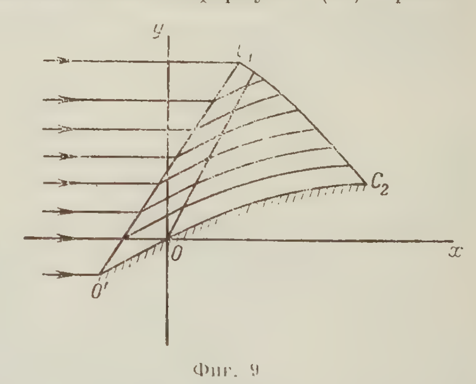
Для того чтобы выделить в правой части соотношения (106) те члены, которые зависят исключительно от наличия перед обтекаемым контуром скачка уплотнения, дополним рассматриваемый обтекаемый контур дугой $O'O$ конечной длины таким образом, чтобы эта дуга в точке O касалась обтекаемого контура, а в точке O' имела касательную, параллельную оси X (фиг. 8). Так как обтекание такого дополненного контура совершается без образования скачка уплотнения (угол наклона скорости на обтекаемом контуре и производная от этого угла по абсциссе предполагаются нами бесконечно малыми), то при вычислении давления на этом контуре можно пользоваться формулой (29). Сравнивая между собой формулы (29), (106) и обозначая через Δp_{stoss} давление, обусловленное наличием скачка уплотнения, получим



Фиг. 8

$$\Delta p_{\text{stoss}}=q[a_{1d}\beta_k^3(0)+a_{2d}\beta_k^4(0)+a_{3d}\beta_k^3(0)\beta_k(x)+a_{4d}\beta_k^3(0)\beta_k'(0)x]+\varepsilon_5. \tag{108}$$

В выражении для Δp_{stoss} в свою очередь можно выделить член, зависящий только от вихреобразования, обусловленного наличием скачка уплотнения. Для того чтобы это сделать, дополним обтекаемый контур OC_2 прямолинейным отрезком касательной к этому контуру, проведенной в точке O (отрезок $O'O$ на фиг. 9). При обтекании контура $O'OC_2$ линия скачка уплотнения образуется, но эта линия есть прямая (прямая $O'C_1$), благодаря чему явление вихреобразования не имеет места. Вычисляя давление на участке OC_2 контура $O'OC_2$, находим



Фиг. 9

$$p=p_0+q\left[a_1\beta_k(x)+a_2\beta_k^2(x)+a_3\beta_k^3(x)+a_4\beta_k^4(x)+a_{1d}\beta_k^3(0)+a_{2d}\beta_k^4(0)+a_{3d}\beta_k^3(0)\beta_k(x)\right]+\varepsilon_5. \tag{109}$$

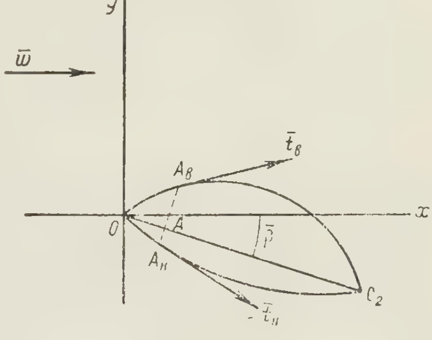
Сравнивая между собою формулы (106) и (109) и обозначая через Δp_{rot} давление, обусловленное вихреобразованием, вызванным наличием скачка уплотнения, получим

$$\Delta p_{\mathrm{rot}} = q a_{4d} \beta_k^3 (0) \beta_k' (0) x + \varepsilon_5. \tag{110}$$

III

Применим теперь полученные результаты к вычислению подъемной силы и лобового сопротивления плоского крыла с острыми передней и задней кромками, помещенного в сверхзвуковой поток с постоянными гидродинамическими элементами.

Начало координат O поместим на передней кромке крыла, а расположение осей координат, направление скорости невозмущенного потока и правило знаков при отсчете углов будем считать такими же, как и в предыдущих исследованиях. Отрезок OC_2, соединяющий переднюю и заднюю кромки (фиг. 10), будем называть, как это принято в теории крыла, хордой крыла. Длину последней обозначим через T, а угол, образованный наикратчайшим поворотом от положительного направления оси X к вектору $\overline{OC_2}$, взятый с соответствующим знаком, — через β.



Фиг. 10

Форма исследуемого нами крыла определяется двумя обтекаемыми контурами, обладающими двумя общими точками O и C_2. Сравнивая между собой при одной и той же абсциссе ординаты точек, расположенных на этих контурах, назовем «верхним обтекаемым контуром» тот, у которого во всякой точке, исключая точки O и C_2, ордината будет больше, чем соответствующая ордината другого контура, который мы назовем «нижним обтекаемым контуром». Функцию $\beta_к(x)$ для верхнего обтекаемого контура обозначим через $\beta_{кв}(x)$, а для нижнего — через $\beta_{кн}(x)$.

Возьмем на хорде крыла произвольную точку A. Расстояние OA обозначим через t. Через точку A проведем прямую, перпендикулярную хорде крыла. Точки пересечения этой прямой с верхним и нижним обтекаемыми контурами обозначим соответственно через $A_в$ и $A_н$. В точке $A_в$ проведем единичный касательный вектор $\overline{t}_в$, а в точке $A_н$ — единичный касательный вектор $\overline{t}_н$. Векторы $\overline{t}_в$ и $\overline{t}_н$ расположим таким образом, чтобы их проекции на направление $\overline{OC_2}$ были положительны. Углы в радианах, образованные наикратчайшими поворотами от вектора $\overline{OC_2}$ к векторам $\overline{t}_в$ и $\overline{t}_н$, взятые с соответствующими знаками, обозначим соответственно через $\beta_в$ и $\beta_н$. Ясно, что $\beta_в$ и $\beta_н$ можно

рассматривать как функции от t. Значения $\beta_в$ и $\beta_н$ в точке O обозначим соответственно через $\beta_{во}$ и $\beta_{но}$, а значения производных по t от $\beta_в$ и $\beta_н$ в той же точке — через $\beta'_{во}$ и $\beta'_{но}$.

Абсцисса x точки $A_в$ вычисляется по формуле

$$x = t\cos\bar{\beta} - \sin\bar{\beta}\int_0^t \operatorname{tg}\beta_в\, dt, \tag{111}$$

а точки $A_н$ — по формуле

$$x = t\cos\bar{\beta} - \sin\bar{\beta}\int_0^t \operatorname{tg}\beta_н\, dt. \tag{112}$$

Значение функции $\beta_{кв}(x)$ в точке $A_в$ определяется из равенства

$$\beta_{кв}(x) = \bar{\beta} + \beta_в, \tag{113}$$

а значение функции $\beta_{кн}(x)$ в точке $A_н$ — из равенства

$$\beta_{кн}(x) = \bar{\beta} + \beta_н. \tag{114}$$

Кроме того имеем соотношения

$$\int_0^T \operatorname{tg}\beta_в\, dt = 0, \tag{115}$$

$$\int_0^T \operatorname{tg}\beta_н\, dt = 0. \tag{116}$$

Предположим, что $\bar{\beta}$, а также $\beta_в$, $\beta_н$ и их производные по t суть бесконечно малые величины. Из соотношений (115), (116) легко находим

$$\int_0^T \beta_в\, dt = -\frac{1}{3}\int_0^T \beta_в^3\, dt + \varepsilon_5, \tag{117}$$

$$\int_0^T \beta_н\, dt = -\frac{1}{3}\int_0^T \beta_н^3\, dt + \varepsilon_5. \tag{118}$$

Переходя к вычислению подъемной силы и лобового сопротивления рассматриваемого нами крыла, заметим, что на верхней стороне крыла образование скачка уплотнения имеет место тогда и только тогда, когда

$$\bar{\beta} + \beta_{во} > 0, \tag{119}$$

а на нижней — тогда и только тогда, когда

$$\bar{\beta} + \beta_{но} < 0. \tag{120}$$

Введем в рассмотрение величины $a_{1в}$, $a_{2в}$, $a_{3в}$, $a_{4в}$, определяя их следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_{1в} &= a_{1d}, \\ a_{2в} &= a_{2d}, \\ a_{3в} &= a_{3d}, \\ a_{4в} &= a_{4d}, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

если $\bar{\beta} + \beta_{во} > 0$;

$$a_{1в} = a_{2в} = a_{3в} = a_{4в} = 0, \tag{122}$$

если $\bar{\beta} + \beta_{во} \leqslant 0$.

Аналогичным образом определим величины $a_{1н}$, $a_{2н}$, $a_{3н}$, $a_{4н}$:

$$\left.\begin{aligned} a_{1н} &= a_{1d}\,, \\ a_{2н} &= a_{2d}\,, \\ a_{3н} &= a_{3d}\,, \\ a_{4н} &= a_{4d}\,, \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

если $\overline{\beta} + \beta_{но} < 0$;

$$a_{1н} = a_{2н} = a_{3н} = a_{4н} = 0, \tag{124}$$

если $\overline{\beta} + \beta_{но} \geqslant 0$.

Обозначая через $p_в$ давление на верхнем обтекаемом контуре, а через $p_н$ — на нижнем, легко найдем при помощи формул (106), (121), (122), (123), (124):

$$\begin{aligned} p_в = p_0 + q\,[a_1\beta_{кв}(x) + a_2\beta^2_{кв}(x) + a_3\beta^3_{кв}(x) + a_4\beta^4_{кв}(x) + a_{1в}\beta^3_{кв}(0) + \\ + a_{2в}\beta^4_{кв}(0) + a_{3в}\beta^3_{кв}(0)\,\beta_{кв}(x) + a_{4в}\beta^3_{кв}(0)\,\beta'_{кв}(0)\,x] + \varepsilon_5, \end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned} p_н = p_0 + q\,[-a_1\beta_{кн}(x) + a_2\beta^2_{кн}(x) - a_3\beta^3_{кн}(x) + a_4\beta^4_{кн}(x) - a_{1н}\beta^3_{кн}(0) + \\ + a_{2н}\beta^4_{кн}(0) + a_{3н}\beta^3_{кн}(0)\,\beta_{кн}(x) + a_{4н}\beta^3_{кн}(0)\,\beta'_{кн}(0)\,x] + \varepsilon_5. \end{aligned} \tag{126}$$

Пусть $\overline{P}$ обозначает главный вектор гидродинамических сил, действующих на единицу длины (по размаху) рассматриваемого нами крыла. Имеем

$$\overline{P} = \oint p\overline{n}\,ds, \tag{127}$$

где через $\overline{n}$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к контуру крыла.

Введем в рассмотрение безразмерный коэффициент подъемной силы C_y и безразмерный коэффициент лобового сопротивления C_x. Эти коэффициенты определяются по формулам

$$C_y = \frac{P_y}{qT}, \tag{128}$$

$$C_x = \frac{P_x}{qT}, \tag{129}$$

где через P_y и P_x обозначены соответственно проекции вектора $\overline{P}$ на ось Y и ось X. Из формул (127), (128), (129) находим

$$C_y = -\frac{1}{qT}\int_0^l p_в\,dx + \frac{1}{qT}\int_0^l p_н\,dx, \tag{130}$$

$$C_x = \frac{1}{qT}\int_0^l p_в \operatorname{tg}\beta_{кв}(x)\,dx - \frac{1}{qT}\int_0^l p_н \operatorname{tg}\beta_{кн}(x)\,dx, \tag{131}$$

где через l обозначена абсцисса точки C_2. При помощи формул (111), (112), (113), (114), (117), (118), (125), (126), (130), (131), после элементарных преобразований, получим

$$C_y = C_{y1} + C_{y2} + C_{y3} + C_{y4} + \varepsilon_5\,, \tag{132}$$

где

$$C_{y1} = -2a_1\beta,$$

$$C_{y2} = -\frac{a_2}{T}\int_0^T (\beta^2_в - \beta^2_н)\,dt.$$

$$C_{y3}=(a_1-2a_3)\bar\beta^3-a_{1\text{в}}(\bar\beta+\beta_{\text{во}})^3-a_{1\text{н}}(\bar\beta+\beta_{\text{но}})^3+$$
$$+\frac{1}{T}(a_1-3a_3)\bar\beta\int_0^T(\beta_\text{в}^2+\beta_\text{н}^2)\,dt+\frac{1}{T}\left(\frac{a_1}{3}-a_3\right)\int_0^T(\beta_\text{в}^3+\beta_\text{н}^3)\,dt,$$

$$C_{y4}=-a_{2\text{в}}(\bar\beta+\beta_{\text{во}})^4+a_{2\text{н}}(\bar\beta+\beta_{\text{но}})^4-a_{3\text{в}}\bar\beta(\bar\beta+\beta_{\text{во}})^3+$$
$$+a_{3\text{н}}\bar\beta(\bar\beta+\beta_{\text{но}})^3-\frac{T}{2}a_{4\text{в}}(\bar\beta+\beta_{\text{во}})^3\beta'_{\text{во}}+\frac{T}{2}a_{4\text{н}}(\bar\beta+\beta_{\text{но}})^3\beta'_{\text{но}}+$$
$$+\frac{1}{T}\left(\frac{5}{2}a_2-6a_4\right)\bar\beta^2\int_0^T(\beta_\text{в}^2-\beta_\text{н}^2)\,dt+\frac{1}{T}\left(\frac{5}{3}a_2-4a_4\right)\bar\beta\int_0^T(\beta_\text{в}^3-\beta_\text{н}^3)\,dt-$$
$$-\frac{a_4}{T}\int_0^T(\beta_\text{в}^4-\beta_\text{н}^4)\,dt;$$

$$C_x=C_{x2}+C_{x3}+C_{x4}+\varepsilon_5, \tag{133}$$

где

$$C_{x2}=2a_1\bar\beta^2+\frac{a_1}{T}\int_0^T(\beta_\text{в}^2+\beta_\text{н}^2)\,dt,$$

$$C_{x3}=\frac{3a_2\bar\beta}{T}\int_0^T(\beta_\text{в}^2-\beta_\text{н}^2)\,dt+\frac{a_2}{T}\int_0^T(\beta_\text{в}^3-\beta_\text{н}^3)\,dt.$$

$$C_{x4}=\left(2a_3-\frac{a_1}{3}\right)\bar\beta^4+a_{1\text{в}}\bar\beta(\bar\beta+\beta_{\text{во}})^3+a_{1\text{н}}\bar\beta(\bar\beta+\beta_{\text{но}})^3+$$
$$+\frac{1}{T}\left(6a_3-\frac{a_1}{2}\right)\bar\beta^2\int_0^T(\beta_\text{в}^2+\beta_\text{н}^2)\,dt+\frac{1}{T}\left(4a_3-\frac{a_1}{3}\right)\bar\beta\int_0^T(\beta_\text{в}^3+\beta_\text{н}^3)\,dt+$$
$$+\frac{1}{T}\left(a_3+\frac{a_1}{3}\right)\int_0^T(\beta_\text{в}^4+\beta_\text{н}^4)\,dt.$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$k=1.405;\quad M=1.5;\quad p_0=1.033\ \text{кг/см}^2. \tag{134}$$

Тогда $q=\frac{p_0kM^2}{2}=1.633$ кг/см²;

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=2(M^2-1)^{-\frac{1}{2}}=1.789;\\
a_2&=(M^2-1)^{-2}(2-2M^2+1.203M^4)=2.296;\\
a_3&=(M^2-1)^{-\frac{7}{2}}(1.333-2M^2+4.008M^4-1.815M^6+\\
&\quad+0.4008M^8)=3.082;\\
a_4&=(M^2-1)^{-5}(0.6667-0.6667M^2+5.616M^4-3.824M^6+\\
&\quad+2.969M^8-0.7840M^{10}+0.07992M^{12})=8.290;\\
a_{1d}&=1.203M^4(M^2-1)^{-\frac{7}{2}}(-0.3333+0.2658M^2-\\
&\quad-0.03271M^4)=0.2766;\\
a_{2d}&=M^4(M^2-1)^{-5}(-1.203+1.317M^2-0.6431M^4+\\
&\quad+0.04556M^6+0.04855M^8)=0.4448;\\
a_{3d}&=M^6(M^2-1)^{-5}(-0.4008-0.0025M^2+0.3869M^4-\\
&\quad-0.1285M^6)=0.3318;\\
a_{4d}&=0.3615M^8(M^2-1)^{-5}(-1+0.7975M^2-0.09813M^4)=\\
&=0.9035.
\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Зададимся функциями $\beta_в$, $\beta_н$:

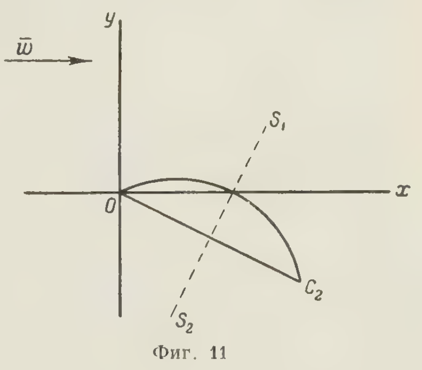
$$\left.\begin{aligned} \beta_в &= -2\bar{\beta} + \frac{4\bar{\beta}}{T}t, \\ \beta_н &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Кроме того предположим, что

$$\bar{\beta} < 0. \tag{137}$$

Форма и положение профиля крыла, определяемого соотношениями (136) и условием (137), изображены на фиг. 11. Легко видеть, что прямая S_1S_2, проведенная перпендикулярно хорде крыла через середину этой хорды, является осью симметрии рассматриваемого профиля. Из соотношений (136) и условия (137) имеем

$$\left.\begin{aligned} \bar{\beta} + \beta_{во} &= -\bar{\beta} > 0, \\ \bar{\beta} + \beta_{но} &= \bar{\beta} < 0. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$



Фиг. 11

Следовательно

$$\left.\begin{aligned} a_{1в} &= a_{1н} = a_{1d} = 0.2766, \\ a_{2в} &= a_{2н} = a_{2d} = 0.4448, \\ a_{3в} &= a_{3н} = a_{3d} = 0.3318, \\ a_{4в} &= a_{4н} = a_{4d} = 0.9035. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Пользуясь формулами (132), (133), (135), (136), (139), получим

$$\left.\begin{aligned} C_y &= -2a_1\bar{\beta} - \frac{4}{3}a_2\bar{\beta}^2 + \left(\frac{7}{3}a_1 - 6a_3\right)\bar{\beta}^3 + \\ &+ \left(\frac{10}{3}a_2 - \frac{56}{5}a_4 + 2a_{3d} + 2a_{4d}\right)\bar{\beta}^4 + \varepsilon_5 = \\ &= -3.578\bar{\beta} - 3.061\bar{\beta}^2 - 14.32\bar{\beta}^3 - 82.73\bar{\beta}^4 + \ldots, \\ C_x &= \frac{10}{3}a_1\bar{\beta}^2 + 4a_2\bar{\beta}^3 + \left(\frac{a_1}{15} + \frac{66}{5}a_3\right)\bar{\beta}^4 + \varepsilon_5 = \\ &= 5.933\bar{\beta}^2 + 9.184\bar{\beta}^3 + 40.8\bar{\beta}^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} \bar{\beta} &= -\frac{\pi}{36}, \\ T &= 100 \text{ см}. \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} C_y &= 0.2936, \\ C_x &= 0.04168. \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

Зная C_y, C_x, T и q, легко находим

$$\left.\begin{aligned} P_y &= qTC_y = 47.9 \text{ кг/см}, \\ P_x &= qTC_x = 6.81 \text{ кг/см}. \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Научно-иссл. институт математики и механики
Ленинградского гос. университета.

Поступило
4. VII. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Meyer Th., Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt, Forsch.-Arb. Ing.-Wes. № 62 (1908).

[2] Prandtl L., Busemann A., Nährungsverfahren sur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeiten, Stodola Festschrift, Zürich 1929.

[3] Ackeret I., Gasdynamik, Handbuch der Physik, 19, B. VII.

[4] Busemann A., Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit, Luftfahrtforschung (1935).

A. DONOV. A PLANE WING WITH SHARP EDGES IN A SUPER-SONIC STREAM

SUMMARY

In the present work the problem of a flow of stream of ideal gas around a thin wing at small angles of attack is investigated, this stream being supposed to be two-dimensional, stationary, super-sonic and deprived of heat-conduction

In the initial part of the work, the problem is stated, and the well-known results obtained by Ackeret, Prandtl and Busemann are cited. These results, as known, are obtained on the basis of the potential super-sonic streams theory, which is founded on the existence of integrable combinations of characteristics of differential equations concerning this problem, and in which some peculiarities of the dynamical conditions on the line of the shoc-wave are utilized.

In the second part the approximate solution of the problem is given with an allowance for vortex-formation caused by the change of entropy along the shoc-wave, when receding from the leading edge of the wing, near which this shoc-wave is formed. For this purpose differential equations of characteristics non admitting integrable combinations are to be dealt with. The solution is obtained by means of a special methode, which enables to find the approximate integrable combinations of differential equations of the characteristics. The obtained combinations let us to receive the approximate formula of pressure in any point of the contour of the wing investigated. From this formula the term is easily segregated depending exclusively on the vortex-formulation, caused by the change of entropy along the shoc-wave. The characteristic distinction of this term of the obtained formula of pressure from the other ones, is that it includes the curvature of the wing contour at the leading edge and the distance from this edge up to the element of the wing for which the pressure is calculated.

In the third part of the work the expressions for lift and drag coefficients of the wing are given, on the base of the formula of pressure obtained above. In conclusion a numerical example is studied.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая — Série mathematique

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выводится общая формула для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Из этой формулы выводятся формулы Фалкнера с общим выражением для коэффициентов и получаются формулы для остаточных членов. Кроме того из общей формулы получаются и новые формулы.

§ 1. Введение

Пусть нам дано одно дифференциальное уравнение порядка n с одной неизвестной функцией y от независимой переменной x

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Пусть ищется интеграл уравнения (1), определяемый начальными условиями: при $x = x_0$

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Пусть, кроме того, существование искомого интеграла предварительно установлено.

Рассмотрим интервал (x_0, X); предположим, что $X > x_0$ и разобьем рассматриваемый интервал на μ равных подинтервалов $(X - x_0 = h\mu)$. Пусть в эквидистантных точках интервала (x_0, X)

$$x_0, \ x_0 + h, \quad x_0 + 2h, \ \ldots, \ a - h, \ a$$

нам известны значения искомого интеграла и его производных до n-го порядка.

Известно, что для численного интегрирования дифференциального уравнения (1) достаточно преобразовать его в систему дифференциальных уравнений первого порядка посредством введения новых переменных:

$$\frac{dy}{dx} = p_1,$$
$$\frac{dp_1}{dx} = p_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{dp_n}{dx} = f(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}),$$

составить n исходных таблиц разностей значений функций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и выполнить параллельное интегрирование всех уравнений, входящих в состав полученной системы, с помощью формулы Адамса *

Фалкнер (2) дал новые формулы интегрирования дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядка. Его рассуждения позволяют вывести формулы для вычисления значений интеграла дифференциального уравнения любого порядка. При применении формул Фалкнера нет надобности в замене данного дифференциального уравнения равносильной системой уравнений и в составлении n таблиц разностей значений функций $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, а достаточно иметь одну таблицу разностей $y^{(n)}(x)$, где n — порядок данного уравнения. Рассуждения Фалкнера не приводят к общему выражению для коэффициентов выводимых им формул и не дают точных выражений для остаточных членов.

В этой работе мы даем общую формулу для интегрирования дифференциального уравнения (1). Из нее легко выводятся формулы Фалкнера с общим выражением для коэффициентов и получаются формулы для остаточных членов. Кроме того из общей формулы получаются и новые формулы, более удобные для практических вычислений, чем формулы Фалкнера.

С целью сокращения записи условимся писать $y_i^{(k)}$ вместо $y^{(k)}(a+ih)$, где i принимает только значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и будем обозначать конечную разность r-го порядка функции $y^{(n)}(x)$ в точке $x=a+ih$ символом $\Delta^r y_i^{(n)}$, т. е. положим

$$\Delta^r y_i^{(n)} \equiv \Delta^r y^{(n)}(a+ih).$$

Образуем таблицу разностей

.	.				
		.			
$a-4h$	$y_{-4}^{(n)}$		.		
		$\Delta y_{-4}^{(n)}$		.	
$a-3h$	$y_{-3}^{(n)}$		$\Delta^2 y_{-4}^{(n)}$		.
		$\Delta y_{-3}^{(n)}$		$\Delta^3 y_{-4}^{(n)}$	
$a-2h$	$y_{-2}^{(n)}$		$\Delta^2 y_{-3}^{(n)}$		$\Delta^4 y_{-4}^{(n)}$
		$\Delta y_{-2}^{(n)}$		$\Delta^3 y_{-3}^{(n)}$	
$a-h$	$y_{-1}^{(n)}$		$\Delta^2 y_{-2}^{(n)}$		.
		$\Delta y_{-1}^{(n)}$		.	
a	$y_0^{(n)}$		.		
		.			
$a+h$	$y_1^{(n)}$				

Как видно из этой таблицы, символ $\Delta^r y_i^{(n)}$ указывает и на порядок разности и на ее место в вертикальном столбце: разность $\Delta^r y_i^{(n)}$ получается при вычитании числа $\Delta^{r-1} y_i^{(n)}$ из числа $\Delta^{r-1} y_{i+1}^{(n)}$ и находится на строке, промежуточной между $\Delta^{r-1} y_i^{(n)}$ и $\Delta^{r-1} y_{i+1}^{(n)}$, из которых она образуется.

* См., например, (1), стр. 413.

Ниже мы выводим формулы и показываем, что эти формулы, только что составленная таблица и уравнение (1) могут быть использованы для последовательного вычисления значений функций

$$y^{(k)}(x) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

при $x=a+ih$ для какого угодно порядкового i.

§ 2. Общие формулы интегрирования

Рассмотрим однозначную функцию $y(x)$ вещественного переменного x, которая в замкнутом интервале (x_0, X), где $X > x_0$, имеет непрерывные последовательные производные вплоть до того порядка, который используется ниже при выводе нужных нам формул.

Пусть функция $y(x)$ во внутренней точке a интервала $x_0 \leqslant x \leqslant X$ принимает вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка соответственно значения $y(a),\ y'(a),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(a)$.

Прилагая к $y^{(k)}(x)$ $(k<n)$ формулу Тейлора, в которой остаточный член будем брать в интегральной форме, и продолжая разложение до членов $(n-k)$-го порядка, мы можем написать

$$y^{(k)}(x)=\sum_{\lambda=0}^{n-k-1}(x-a)^{\lambda}\frac{y^{(k+\lambda)}(a)}{\lambda!}+\frac{1}{(n-k-1)!}\int_a^x (x-z)^{n-k-1}y^{(n)}(z)\,dz.$$

Положив в этой формуле $x=a+\alpha h$ и сделав замену переменного $z=a+th$, мы получим

$$y^{(k)}(a+\alpha h)=\sum_{\lambda=0}^{n-k-1}\frac{\alpha^{\lambda}h^{\lambda}}{\lambda!}\,y^{(k+\lambda)}(a)+$$
$$+\frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!}\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-k-1}\,y^{(n)}(a+th)\,dt. \tag{2}$$

Заменяя в (2) h на $(-h)$, заключаем, что

$$y^{(k)}(a-\alpha h)=\sum_{\lambda=0}^{n-k-1}\frac{(-\alpha)^{\lambda}h^{\lambda}}{\lambda!}\,y^{(k+\lambda)}(a)+$$
$$+\frac{(-h)^{n-k}}{(n-k-1)!}\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-k-1}\,y^{(n)}(a-th). \tag{3}$$

Задача состоит в таком преобразовании формул (2) и (3), чтобы они давали возможность определять

$$y_1,\ \ y_1',\ \ \ldots,\ \ y_1^{(n-1)}$$

по значениям

$$\ldots\ y_{-2}^{(n)},\ \ y_{-1}^{(n)},\ \ y_0^{(n)}\ \ \text{и}\ \ y_0^{(k)}\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Для сокращения записи введем два полинома степени λ:

$$t^{(-\lambda)}=t(t+1)\ \ldots\ (t+\lambda-1),$$
$$t^{(\lambda)}\ =t(t-1)\ \ldots\ (t-\lambda+1).$$

При $\lambda=0$ мы припишем этим полиномам значение 1.

Возьмем внутри интервала (x_0, X) точки $\ldots, a-h, a, a+th$ и выпишем интерполяционные формулы Ньютона:

$$y^{(n)}(a+th)=\sum_{\lambda=0}^{r}\frac{t^{(-\lambda)}}{\lambda!}\Delta^{\lambda}y_{-\lambda}^{(n)}+\frac{h^{r+1}t^{(-r-1)}}{(r+1)!}y^{(n+r+1)}(a+\tau h), \tag{4}$$

$$y^{(n)}(a-th)=\sum_{\lambda=0}^{r}\frac{(-1)^{\lambda}t^{(\lambda)}}{\lambda!}\Delta^{\lambda}y_{-\lambda}^{(n)}+\frac{(-h)^{r+1}t^{(r+1)}}{(r+1)!}y^{(n+r+1)}(a-\tau_1 h), \tag{5}$$

где τ содержится между наибольшим и наименьшим из чисел $0, -r, t$, а τ_1 — между $0, r, t$.

Задача вычисления $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ по значениям $\ldots y_{-2}^{(n)}, y_{-1}^{(n)}, y_0^{(n)}$ и $y_0^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, очевидно, будет решена, если мы подставим в (2) значение $y^{(n)}(a+th)$ из (4). Получим

$$y^{(k)}(a+\alpha h)=\sum_{\lambda=0}^{n-k}\frac{\alpha^{\lambda}h^{\lambda}}{\lambda!}y^{(k+\lambda)}(a)+h^{n-k}\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_{\lambda}\Delta^{\lambda}y_{-\lambda}^{(n)}+R, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{\lambda}=\frac{1}{\lambda!\,(n-k-1)!}\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-k-1}t^{(-\lambda)}\,dt,$$

$$R=\frac{h^{n+r+1-k}}{(r+1)!\,(n-k-1)!}\int_0^{\alpha}(\alpha-t)^{n-k-1}t^{(-r-1)}y^{(n+r+1)}(a+\tau h)\,dt.$$

При $\alpha=1$ получаем формулу

$$y^{(k)}(a+h)=\sum_{\lambda=0}^{n-k}\frac{h^{\lambda}}{\lambda!}y^{(k+\lambda)}(a)+h^{n-k}\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_{\lambda}\Delta^{\lambda}y_{-\lambda}^{(n)}+R, \tag{7}$$

где

$$\alpha_{\lambda}=\frac{1}{\lambda!\,(n-k-1)!}\int_0^{1}(1-t)^{n-k-1}t^{(-\lambda)}\,dt, \tag{8}$$

$$R=\frac{h^{n+r+1-k}}{(r+1)!\,(n-k-1)!}\int_0^{1}(1-t)^{n-k-1}t^{(-r-1)}y^{(n+r+1)}(a+\tau h)\,dt.$$

Замечая, что $(1-t)^{n-k-1}t^{(-r-1)}$ не меняет знака в интервале $0<t<1$, полученный остаточный член можно, применяя теорему о среднем значении, выразить следующим образом:

$$R=\frac{h^{n+r+1-k}}{(r+1)!\,(n-k-1)!}y^{(n+r+1)}(a+\vartheta h)\int_0^{1}(1-t)^{n-k-1}t^{(-r-1)}\,dt,$$

где ϑ означает некоторое число, заключающееся между $-r$ и 1.

Пренебрегая остаточным членом в формуле (7), приходим к формуле

$$Y^{(k)}(a+h)=\sum_{\lambda=0}^{n-k}\frac{h^{\lambda}}{\lambda!}Y^{(k+\lambda)}(a)+h^{n-k}\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_{\lambda}\Delta^{\lambda}Y_{-\lambda}^{(n)}, \tag{9}$$

где $Y_i^{(k)}$ обозначает приближенное значение $y_i^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, а $\Delta^{\lambda}Y_{-\lambda}^{(n)}$ — приближенное значение разности $\Delta^{\lambda}y_{-\lambda}^{(n)}$.

Каждый член в правой части формулы (9) известен, так что мы можем отсюда найти числа

$$Y_1, \quad Y_1', \quad \ldots, \quad Y_1^{(n-1)}.$$

Уравнение

$$Y_1^{(n)} = f(a+h, \quad Y_1, \quad Y_1', \quad \ldots, \quad Y_1^{(n-1)})$$

дает возможность вычислить $Y_1^{(n)}$.

Вернемся к таблице разностей значений $y^{(n)}(x)$, помещенной на стр. 628. Число $Y_1^{(n)}$ дает возможность прибавить новую косую восходящую строку к этой таблице. Прибавив новую косую строку к таблице разностей функции $y^{(n)}(x)$, мы можем повторить наши рассуждения и по отношению $Y_2^{(k)}$. Закончив вычисление чисел $Y_2^{(k)}$, мы можем перейти к вычислению чисел $Y_3^{(k)}$ и т. д.

Подставляя теперь в (3) значение $y^{(n)}(a-th)$ из (5), находим

$$y^{(k)}(a-\alpha h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k} \frac{(-\alpha)^\lambda h^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a) + (-h)^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda y_{-\lambda}^{(n)} + R, \qquad (10)$$

где

$$\beta_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(n-k-1)!} \int_0^\alpha (\alpha - t)^{n-k-1} t^{(\lambda)}\, dt,$$

$$R = \frac{(-h)^{n+r+1-k}}{(r+1)!\,(n-k-1)!} \int_0^\alpha (\alpha - t)^{n-k-1} t^{(r+1)} y^{(n+r+1)}(a - \tau_1 h)\, dt.$$

При $\alpha = 1$ получаем формулу:

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(a-h) - \sum_{\lambda=1}^{n-k} \frac{(-h)^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a) - (-h)^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda y_{-\lambda}^{(n)} + R, \qquad (11)$$

$$\beta_\lambda = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(n-k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(\lambda)}\, dt, \qquad (12)$$

$$R = \frac{(-h)^{n+r+1-k}}{(r+1)!\,(n-k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(r+1)} y^{(n+r+1)}(a-\tau_1 h)\, dt.$$

Ввиду того что $(1-t)^{n-k-1}\, t^{(r+1)}$ не меняет знака в интервале $0 < t < 1$, остаточный член R можно выразить, применяя теорему о среднем значении, следующим образом:

$$R = \frac{(-h)^{n+r+1-k}}{(r+1)!\,(n-k-1)!}\, y^{(n+r+1)}(a - \vartheta_1 h) \int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(r+1)}\, dt,$$

где ϑ_1 означает некоторое число, лежащее между -1 и r.

Пренебрегая остаточным членом в формуле (11), получим

$$Y^{(k)}(a) = Y^{(k)}(a-h) - \sum_{\lambda=1}^{n-k} \frac{(-h)^\lambda}{\lambda!} Y^{(k+\lambda)}(a) - (-h)^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda Y_{-\lambda}^{(n)}. \qquad (13)$$

Здесь, как и выше, $Y_i^{(k)}$ обозначает приближенное значение $y_i^{(k)}$, а $\Delta^\lambda Y_{-\lambda}^{(n)}$ — приближенное значение разности $\Delta^\lambda y_{-\lambda}^{(n)}$.

Теперь скажем несколько слов о применении формулы (13). Прежде всего заметим, что все разности, применяемые в формуле (13), лежат на одной и той же восходящей косой строке с $y^{(n)}(a)$. Эта формула может быть использована для корректирования приближенных значений $y^{(k)}(x)$, найденных с помощью формулы (9).

§ 3. Употребительнейшие приближенные формулы

Из общей формулы (9) мы можем получить в частных случаях некоторые общеизвестные приближенные формулы для интегрирования дифференциальных уравнений.

Положив $k=0$ и $n=1$, получим формулу Адамса ([1])

$$Y(a+h)=Y(a)+hY'(a)+h\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_\lambda \Delta^\lambda Y'_{-\lambda}.$$

Коэффициенты α_λ могут быть вычислены при помощи формул (8); вот значения нескольких из этих коэффициентов:

$$\alpha_1=\frac{1}{2}, \quad \alpha_2=\frac{5}{12}, \quad \alpha_3=\frac{3}{8}, \quad \alpha_4=\frac{251}{720},$$
$$\alpha_5=\frac{95}{288}, \quad \alpha_6=\frac{19\,087}{60\,480}, \quad \alpha_7=\frac{5\,257}{17\,280}, \quad \alpha_8=\frac{1\,070\,017}{3\,628\,800},$$
$$\alpha_9=\frac{2\,082\,753}{7\,257\,600}.$$

Положив $k=0$ и $n=2$, получим формулу Фалкнера ([2])

$$Y(a+h)=Y(a)+hY'(a)+\frac{h^2}{2}Y''(a)+h^2\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_\lambda \Delta^\lambda Y''_{-\lambda}.$$

Коэффициенты α_λ могут быть вычислены при помощи формулы (8); вот значения нескольких из них:

$$\alpha_1=\frac{1}{6}, \quad \alpha_2=\frac{1}{8}, \quad \alpha_3=\frac{19}{180}, \quad \alpha_4=\frac{3}{32},$$
$$\alpha_5=\frac{863}{10\,080}, \quad \alpha_6=\frac{275}{3\,456}, \quad \alpha_7=\frac{33\,953}{453\,600}, \quad \alpha_8=\frac{8\,183}{115\,200}.$$

Положив $k=0$ и $n=3$, получим формулу Фалкнера ([2])

$$Y(a+h)=Y(a)+hY'(a)+\frac{h^2}{2!}Y''(a)+\frac{h^3}{3!}Y'''(a)+h^3\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_\lambda \Delta^\lambda Y'''_{-\lambda}.$$

Коэффициенты α_λ могут быть вычислены при помощи формулы (8); вот значения нескольких из этих коэффициентов:

$$\alpha_1=\frac{1}{24}, \quad \alpha_2=\frac{7}{240}, \quad \alpha_3=\frac{17}{720}, \quad \alpha_4=\frac{41}{2\,016},$$
$$\alpha_5=\frac{731}{40\,320}, \quad \alpha_6=\frac{8\,563}{518\,400}, \quad \alpha_7=\frac{27\,719}{1\,814\,400}.$$

Наконец, положив $k=0$, $n=4$, получим

$$Y(a+h)=Y(a)+hY'(a)+\frac{h^2}{2!}Y''(a)+\frac{h^3}{3!}Y'''(a)+$$
$$+\frac{h^4}{4!}Y^{\mathrm{IV}}(a)+h^4\sum_{\lambda=1}^{r}\alpha_\lambda \Delta^\lambda Y^{\mathrm{IV}}_{-\lambda}.$$

Вычисление показывает, что

$$\alpha_1 = \frac{1}{120}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{180}, \qquad \alpha_3 = \frac{11}{2\,520},$$
$$\alpha_4 = \frac{89}{24\,192}, \qquad \alpha_5 = \frac{5\,849}{1\,814\,400}, \qquad \alpha_6 = \frac{1\,501}{518\,400}.$$

Из общей формулы (13) мы можем получить в частных случаях некоторые приближенные формулы, представляющие практический интерес.

Положив $k=0$ и $n=1$, получим формулу Лапласа

$$Y(a) = Y(a-h) + hY'(a) + h\sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda Y'_{-\lambda}.$$

Коэффициенты β_λ могут быть вычислены при помощи формулы (12); вот значения нескольких из этих коэффициентов:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{12}, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{24},$$
$$\beta_4 = -\frac{19}{720}, \qquad \beta_5 = -\frac{3}{160}, \qquad \beta_6 = -\frac{863}{60\,480},$$
$$\beta_7 = -\frac{275}{24\,192}, \qquad \beta_8 = -\frac{33\,953}{3\,628\,800}, \qquad \beta_9 = -\frac{57\,281}{7\,257\,600}.$$

Положив $k=0$ и $n=2$, получим приближенную формулу

$$Y(a) = Y(a-h) + hY'(a) - \frac{h^2}{2} Y''(a) - h^2\sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda Y''_{-\lambda}.$$

С помощью формулы (12) находим численные значения нескольких первых коэффициентов β_λ; они равны:

$$\beta_1 = -\frac{1}{6}, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{24}, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{45}, \qquad \beta_4 = -\frac{7}{480},$$
$$\beta_5 = -\frac{107}{10\,080}, \qquad \beta_6 = -\frac{199}{24\,192}, \qquad \beta_7 = -\frac{6\,031}{907\,200}, \qquad \beta_8 = -\frac{5\,741}{1\,036\,800}$$

Положив $k=0$, $n=3$, получим приближенную формулу

$$Y(a) = Y(a-h) + hY'(a) - \frac{h^2}{2!} Y''(a) + \frac{h^3}{3!} Y'''(a) + h^3\sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda Y'''_{-\lambda}.$$

Числа β_λ легко могут быть вычислены с помощью формулы (12); вот значения нескольких из них:

$$\beta_1 = -\frac{1}{24}, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{80}, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{144}, \qquad \beta_4 = -\frac{47}{10\,080},$$
$$\beta_5 = -\frac{139}{40\,320}, \qquad \beta_6 = -\frac{9\,809}{3\,628\,800}, \qquad \beta_7 = -\frac{4\,001}{1\,814\,400}.$$

Наконец, положив $k=0$, $n=4$, мы получаем, что

$$Y(a) = Y(a-h) + hY'(a) - \frac{h^2}{2!} Y''(a) + \frac{h^3}{3!} Y'''(a) -$$
$$- \frac{h^4}{4!} Y^{IV}(a) - h^4\sum_{\lambda=1}^{r} \beta_\lambda \Delta^\lambda Y^{IV}_{-\lambda}.$$

В этом случае с помощью формулы (12) мы можем найти ряд первых значений для β_λ, начиная с $\lambda = 1$; они будут следующие:

$$\beta_1 = -\frac{1}{120}, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{360}, \qquad \beta_3 = -\frac{1}{630},$$
$$\beta_4 = -\frac{131}{120\,960}, \qquad \beta_5 = -\frac{1\,469}{1\,814\,400}, \qquad \beta_6 = -\frac{2\,323}{3\,628\,800}$$

Ряд общеизвестных формул, а также новых формул численного интегрирования дифференциальных уравнений мы можем получить из ранее найденных формул путем их сложения и вычитания. Некоторые из формул, полученных указанным путем, имеют большое практическое значение, так как в одних случаях упрощаются коэффициенты, а в других новые формулы дают лучшее приближение, чем формулы вида (7).

Здесь для наших целей достаточно остановиться только на двух разложениях, именно: на разложении $y^{(k)}(a+h) + y^{(k)}(a-h)$, соответствующем четным значениям $n-k$, и на разложении $y^{(k)}(a+h) - y^{(k)}(a-h)$, соответствующем нечетным значениям $n-k$.

Пренебрегая остаточными членами, мы можем написать, что

$$Y^{(k)}(a+h) \pm Y^{(k)}(a-h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k} \frac{1 \pm (-1)^\lambda}{\lambda!} \cdot h^\lambda Y^{(k+\lambda)}(a) +$$
$$+ h^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r} \gamma_\lambda \Delta^\lambda Y^{(n)}_{-\lambda}, \tag{14}$$

где верхние знаки соответствуют четным, а нижние — нечетным значениям $n-k$. Здесь

$$\gamma_\lambda = \alpha_\lambda + \beta_\lambda.$$

При помощи формул (8) и (12) можно вычислить все коэффициенты γ_λ.

Таблица на стр. 628 показывает, что в формулу (14) входят разности, находящиеся на одной и той же косой восходящей строке с $y^{(n)}(a)$, и что каждый член в правой части (14) известен. Следовательно, вычислительный процесс ничем не будет отличаться от процесса, выполняемого при интегрировании уравнения (1) с помощью формулы (9).

Рассмотрим несколько частных случаев. Положив в формуле (14) $k = 0$, $n = 1$, получим

$$Y(a+h) = Y(a-h) + 2hY'(a) + h \sum_{\lambda=1}^{r} \gamma_\lambda \Delta^\lambda Y'_{-\lambda}, \tag{15}$$

где девять первых коэффициентов γ_λ имеют следующие числовые значения:

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{3}, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{3}, \qquad \gamma_4 = \frac{29}{90},$$
$$\gamma_5 = \frac{14}{45}, \qquad \gamma_6 = \frac{1\,139}{3\,780}, \qquad \gamma_7 = \frac{41}{140}, \qquad \gamma_8 = \frac{32\,377}{113\,400},$$
$$\gamma_9 = \frac{3\,956}{14\,175}.$$

Положив $k=0$, $n=2$, мы получим приближенную формулу Штермера *

$$Y(a+h)=2Y(a)-Y(a-h)+h^2Y''(a)+h^2\sum_{\lambda=1}^{r}\gamma_\lambda\Delta^\lambda Y''_{-\lambda}, \qquad (16)$$

где восемь первых коэффициентов γ_λ имеют следующие числовые значения:

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\frac{1}{12},\quad \gamma_3=\frac{1}{12},\quad \gamma_4=\frac{19}{240},$$
$$\gamma_5=\frac{3}{40},\quad \gamma_6=\frac{863}{12\,096},\quad \gamma_7=\frac{275}{4\,032},\quad \gamma_8=\frac{237\,671}{3\,628\,800}.$$

Положив $k=0$, $n=3$, мы получим приближенную формулу

$$Y(a+h)=Y(a-h)+2hY'(a)+\frac{h^3}{3}Y'''(a)+h^3\sum_{\lambda=1}^{r}\gamma_\lambda\Delta^\lambda Y'''_{-\lambda}, \qquad (17)$$

где семь первых коэффициентов γ_λ имеют следующие числовые значения:

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\frac{1}{60},\quad \gamma_3=\frac{1}{60},\quad \gamma_4=\frac{79}{5\,040},$$
$$\gamma_5=\frac{37}{2\,520},\quad \gamma_6=\frac{12\,533}{907\,200},\quad \gamma_7=\frac{3\,953}{302\,400}.$$

Наконец, положив $k=0$, $n=4$, мы получим формулу

$$Y(a+h)=2Y(a)-Y(a-h)+h^2Y''(a)+\frac{h^4}{12}Y^{IV}(a)+h^4\sum_{\lambda=1}^{r}\gamma_\lambda\Delta^\lambda Y^{IV}_{-\lambda}, \qquad (18)$$

где первые шесть коэффициентов γ_λ имеют следующие числовые значения:

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\frac{1}{360},\quad \gamma_3=\frac{1}{360},\quad \gamma_4=\frac{157}{60\,480},$$
$$\gamma_5=\frac{73}{30\,240},\quad \gamma_6=\frac{341}{151\,200}.$$

Сравнение коэффициентов α_λ и γ_λ показывает, что формулы с коэффициентами γ_λ проще по форме, чем формулы с коэффициентами α_λ.

Едва ли следует отмечать, что формула (15) применяется для интегрирования дифференциального уравнения первого порядка; что для интегрирования уравнения второго порядка мы имеем формулу (16) и формулу, которая получится, если в (15) взять функцию $Y'(x)$ вместо $Y(x)$; что при интегрировании дифференциального уравнения третьего порядка можно использовать формулы (15), (16) и (17), заменив в (15) функцию $Y(x)$ на $Y''(x)$, а в (16) $Y(x)$ на $Y'(x)$, и что наконец интегрирование уравнения четвертого порядка можно выполнить с помощью формул (15), (16), (17) и (18), заменив в (15) функцию $Y(x)$ на $Y'''(x)$, в (16) $Y(x)$ на $Y''(x)$ и в (17) $Y(x)$ на $Y'(x)$.

* См., например [1], стр. 414.

§ 4. Уменьшение интервала

Предположим, что на какой-нибудь стадии вычисления мы находим ступень h по тем или иным причинам столь большой, что дальнейшее вычисление будет давать результат мало надежный. Это может случиться на практике, например, тогда, когда применяемые разности $y^{(n)}(x)$ значительно уклоняются от постоянного малого числа.

Пусть мы нашли нужным интегрирование продолжить при меньшей ступени $\frac{h}{\sigma}$, где σ — некоторое положительное целое число. Для этого мы прежде всего должны построить таблицу разностей функции $y^{(n)}(x)$ при ступени, в σ раз меньшей.

Для удобства рассуждений мы предположим, что уменьшение интервала h необходимо выполнить, начиная с некоторого $x = a$. При построении новой таблицы мы должны иметь значения функций $y^{(k)}(x)$ при значениях аргумента

$$a, \quad a + \frac{h}{\sigma}, \quad a + 2\frac{h}{\sigma}, \ldots, a + h$$

с достаточной степенью точности, ибо дальнейшие ошибки в значениях $y^{(k)}(x)$ в новых точках деления будут зависеть от точности, с которой вычислены первоначальные значения $y^{(k)}\left(a + \nu\frac{h}{\sigma}\right)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, \sigma)$.

Полагая, например, в формуле (6)

$$\alpha = \frac{1}{\sigma}, \ \frac{2}{\sigma}, \ \ldots, \ 1,$$

мы получим формулы, содержащие разности, расположенные в одной и той же косой восходящей строке старой таблицы вместе с $y^{(n)}(a)$. Эти формулы немедленно дадут нам числа

$$y^{(k)}\left(a + \frac{\nu}{\sigma}h\right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Числа $y^{(k)}(a)$, $y^{(k)}\left(a + \frac{h}{\sigma}\right), \ldots, y^{(k)}(a+h)$ и уравнение (1) позволяют вычислить значения $y^{(n)}(x)$ в точках $a + \frac{\nu}{\sigma}h$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Закончив вычисление чисел $y^{(n)}\left(a + \frac{\nu}{\sigma}h\right)$, мы можем составить исходную таблицу разностей $y^{(n)}(x)$ для нового промежутка h_1.

Дальнейший процесс состоит в продолжении составленной таблицы путем прибавления новых наклонных строк. Для этого заменяем в (9) h на h_1 и подставляем новые разности, соответствующие новому промежутку. Таким образом получим формулы, в правой части которых все члены будут известны. С помощью этих формул можно вести вычисление с новой величины промежутка интегрирования, т. е. можно приступить к вычислению чисел $y^{(k)}(a_1 + h_1)$, где $a_1 = a + h$. Имея числа $y_1^{(k)}(a_1 + h_1)$, мы вычисляем $y^{(n)}(a_1 + h_1)$ и затем прибавляем новую наклонную строку к новой таблице разностей $y^{(n)}(x)$. Повторяя эту операцию, найдем числа $y^{(k)}(a_1 + 2h_1)$, $y^{(k)}(a_1 + 3h_1)$ и т. д.

§ 5. Обобщение формулы Коуэлла

Для сокращения записи введем полином степени 2λ:

$$t^{[2\lambda]} = t^2 (t^2 - 1)(t^2 - 4) \ldots (t^2 - (\lambda - 1)^2).$$

Пусть функция $y(x)$ имеет все производные до $(2r + n + 2)$-го порядка в интервале (x_0, X). Пусть точки интерполирования $a \pm \alpha h$, a, $a \pm h, \ldots, a \pm rh$ лежат в этом интервале.

Если воспользоваться интерполяционными формулами Гаусса, то с помощью рассуждений, сходных с рассуждениями § 2, мы получим:

$$y^{(k)}(a + \alpha h) \pm y^{(k)}(a - \alpha h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k} [1 \pm (-1)^\lambda] \frac{\alpha^\lambda h^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a) +$$

$$+ h^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r-1} A_\lambda \Delta^{2\lambda} y^{(n)}(a - \alpha h) + R,$$

$$A_\lambda = \frac{2}{(2\lambda)!\,(n-k-1)!} \int_0^\alpha (\alpha - t)^{n-k-1}\, t^{[2\lambda]}\, dt.$$

$$R = \frac{2h^{n+2r+2-k}}{(n-k-1)!\,(2r+2)!} \int_0^\alpha (1 - t)^{n-k-1} t^{[2r+2]} y^{(n+2r+2)}(\sigma)\, dt,$$

где знак плюс соответствует четным, а знак минус — нечетным значениям $n - k$. Буквой σ мы здесь обозначаем промежуточное значение аргумента, лежащее между значениями a, $a \pm h, \ldots, a \pm rh$.

При $\alpha = 1$ получаем формулу

$$y^{(k)}(a + h) \pm y^{(k)}(a - h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k} [1 \pm (-1)^\lambda] \frac{h^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a) +$$

$$+ h^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r-1} A_\lambda \Delta^{2\lambda} y^{(n)}(a - \lambda h) + R, \qquad (19)$$

$$A_\lambda = \frac{2}{(2\lambda)!\,(n-k-1)!} \int_0^1 (1 - t)^{n-k-1} t^{[2\lambda]}\, dt,$$

$$R = \frac{2h^{n+2r+2-k}\, y^{(n+2r+2)}(a + \tau h)}{(n-k-1)!\,(2r+2)!} \int_0^1 (1 - t)^{n-k-1} t^{[2r+2]}\, dt,$$

причем $-r < \tau < r$.

Положив $k = 0$, мы получим следующую формулу для вычисления коэффициентов:

$$A_\lambda = \frac{2}{(2\lambda)!\,(n-1)!} \int_0^1 (1 - t)^{n-1} t^2 (t^2 - 1^2) \ldots [t^2 - (\lambda - 1)^2]\, dt.$$

В следующей таблице приведено несколько численных значений этих коэффициентов:

n	A_1	$-A_2$	A_3	$-A_4$	A_5
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{756}$	$\frac{23}{113\,400}$	$\frac{263}{7\,484\,400}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{31}{60\,480}$	$\frac{289}{3\,628\,800}$	
3	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{1\,008}$	$\frac{113}{907\,200}$		
4	$\frac{1}{360}$	$\frac{11}{60\,480}$			

Пренебрегая остаточным членом в формуле (19), получаем

$$Y^{(k)}(a+h) \pm Y^{(k)}(a-h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k} [1 \pm (-1)^{\lambda}] \frac{h^{\lambda}}{\lambda!} Y^{(k+\lambda)}(a) +$$

$$+ h^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{l-1} A_{\lambda} \Delta^{2\lambda} Y^{(n)}(a-\lambda h), \qquad (20)$$

где $Y^{(k)}$ обозначает приближенное значение $y^{(k)}$, а $\Delta^{2\lambda} Y^{(n)}(a-\lambda h)$ — приближенное значение разности $\Delta^{2\lambda} y^{(n)}(a-\lambda h)$.

Из общей формулы (20) мы можем получить в частных случаях некоторые общеизвестные приближенные формулы для интегрирования дифференциальных уравнений. Так, например, положив $k=0$, $n=1$, получим формулу, которую Флоринский [(3), стр. 91] применил для интегрирования дифференциального уравнения первого порядка; положив $k=0$, $n=2$, получим формулу Коуэлла [(4), стр. 155] для интегрирования дифференциального уравнения второго порядка и, наконец, положив $k=0$, $n=3$ и $k=0$, $n=4$, получим формулы, выведенные В. П. Ветчинкиным [(5), стр. 255].

Составим таблицу разностей

.	.	.			
$a-2h$	$y_{-2}^{(n)}$		.		
		$\Delta y_{-2}^{(n)}$		.	
$a-h$	$y_{-1}^{(n)}$		$\Delta^2 y_{-2}^{(n)}$		.
		$\Delta y_{-1}^{(n)}$		$\Delta^3 y_{-2}^{(n)}$	
a	$y_0^{(n)}$		$\Delta^2 y_{-1}^{(n)}$		$\Delta^4 y_{-2}^{(n)}$
		$\Delta y_0^{(n)}$		$\Delta^3 y_{-1}^{(n)}$	
$a+h$	$y_{-1}^{(n)}$		$\Delta^2 y_0^{(n)}$		.
		$\Delta y_1^{(n)}$		.	
$a+2h$	$y_2^{(n)}$		.		
.		.			

и вернемся к формуле (20). Из этой таблицы видно, что в формулу (20) входят приближенные значения неизвестных разностей, находящихся на одной и той же горизонтальной строке с a и $y_0^{(n)}$ образованной

нами таблицы. Чтобы найти $\Delta^2 y_{-1}^{(n)}$, мы должны знать $y_1^{(n)}$, а для этого необходимо иметь значения искомого интеграла и его производных $y^{(k)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ при $x=a+h$. Чтобы иметь в таблице разности $\Delta^2 y_{-1}^{(n)}$ и $\Delta^4 y_{-2}^{(n)}$, мы должны знать $y_1^{(n)}$ и $y_2^{(n)}$, т. е. значения искомого интеграла и его производных $y^{(k)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ при $x=a+h$ и $x=a+2h$ и т. д.

Покажем теперь, как посредством формулы (20) интегрируется дифференциальное уравнение (1). Для простоты рассуждений предположим, что разложение (20) оборвано на разности второго порядка. Тогда для вычисления последовательных числовых значений $y_i^{(k)}$, соответствующих $a+ih$, для какого угодно порядкового i надо иметь в исходной таблице всего две пары числовых величин $a-h$, $y_{-1}^{(n)}$ и a, $y_0^{(n)}$. Для того чтобы вычисления были выполнимы, мы должны знать кроме $y_{-1}^{(n)}$ и $y_0^{(n)}$ значения $y_0^{(k)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, (n-1))$.

Сначала мы знаем только значения $y_{-1}^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ из начальных условий дифференциального уравнения и самого дифференциального уравнения, числа $y_0^{(k)}$ могут быть вычислены, например, по формуле Тейлора. Переходим к числам $Y_1^{(k)}$. Мы их вычислить не можем потому, что не знаем разности $\Delta^2 Y_{-1}^{(n)}$. Принимая в первом приближении $\Delta^2 Y_{-1}^{(n)}=0$, мы можем тотчас же вычислить числа $Y_1, Y_1', \ldots, Y_1^{(n-1)}$, а затем с помощью соотношения

$$Y_1^{(n)}=f(x_0+h, Y_1, Y_1', \ldots, Y_1^{(n-1)})$$

и $Y_1^{(n)}$. Зная $Y_1^{(n)}$, мы можем вычислить уже приближенное значение $\Delta^2 Y_{-1}^{(n)}$ и с помощью формулы (20) более точные значения $Y_1, Y_1', \ldots, Y_1^{(n-1)}$. Далее, вычислив с помощью этих чисел и данного дифференциального уравнения $Y_1^{(n)}$, мы сможем получить более точно и разность $\Delta^2 Y_{-1}^{(n)}$. В случае значительного отклонения полученной во втором приближении разности $\Delta^2 Y_{-1}^{(n)}$ от ее значения, полученного в первом приближении, необходимо произвести пересчет.

Мы показали, как переходить от значений $Y_{-1}^{(k)}$, $Y_0^{(k)}$ к вычислению значения $Y_1^{(k)}$. Ясно, что можно повторить наше рассуждение и по отношению $Y_2^{(k)}$, с той лишь разницей, что разность $\Delta^2 Y_0^{(n)}$ в первом приближении можно принять равной не нулю, а $\Delta^2 Y_{-1}^{(n)}$. Таким же образом можно перейти к вычислению $Y_3^{(k)}$ и т. д.

Недостатком изложенного способа интегрирования является то, что формула (20) содержит неизвестные разности, а потому искомые значения $Y^{(k)}(x)$ получаются с помощью этой формулы не сразу, а путем последовательных приближений. Однако быстрота убывания коэффициентов формулы (20) столь значительна, что при достаточно малом h и незначительности величины высших разностей, удерживаемых в этой формуле, можно ограничиться первым приближением.

Для начала интегрирования с помощью формулы (20) требуется исходная таблица с меньшим числом значений $Y^{(n)}(x)$, чем требуют того формулы (9) и (14); это является достоинством формулы (20).

§ 6. Проверка вычислений

Чтобы иметь представление о точности результата, получаемого с помощью формул (9) и (14), можно повторить интегрирование при уменьшенной вдвое ступени и сличить полученные оба раза значения $y^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, соответствующие значениям аргумента

$$\ldots, a-2h, \quad a-h, \quad a, \quad a+h, \ldots$$

Но чтобы применить одну и ту же приближенную формулу к ступеням h и $\frac{h}{2}$, конечно, недостаточно подставить в данную формулу новую ступень, а нужно также подставить и новые разности, соответствующие этому новому интервалу. Это в свою очередь требует составления новой таблицы разностей и повторения всего вычислительного процесса, что в большинстве случаев очень затруднительно по своей громоздкости. Поэтому вместо повторного интегрирования лучше всего получаемые значения $Y^{(k)}(x)$ подвергать проверке при каждом отдельном шаге. В нашем случае такая проверка может быть произведена следующим образом: сохранив прежнюю ступень h, мы перевычисляем значения $Y^{(k)}(x)$ с помощью какой-нибудь другой более быстро сходящейся формулы, нежели (9) и (14). Такой формулой является, например, формула (13).

Пусть речь идет о проверке значения $Y^{(k)}(a+h)$, полученного с помощью формулы (9) или (14). Пусть полученное значение $Y^{(k)}(a+h)$ подвергается проверке с помощью формулы (13). Сличение обоих результатов дает требуемую проверку и в той или иной мере гарантирует правильность нужных десятичных знаков в значениях $Y^{(k)}(a+h)$.

Мы показали, как проверять значения $Y^{(k)}(a+h)$. Ясно, что можно повторить наше рассуждение и по отношению $Y^{(k)}(a+2h)$, $Y^{(k)}(a+3h), \ldots$ Это позволит нам продолжить исходную таблицу значений $Y^{(k)}(x)$ достаточно далеко, не уменьшая ступени таблицы.

Пусть, например, расширение исходной таблицы осуществляется с помощью формулы (9), доведенной до члена с разностью $(r+k)$-го порядка. В качестве контрольной формулы будем пользоваться формулой (13), сохранив в ней разности $(r+k)$-го порядка. Подставляя в формулы (9) и (13) $r+k$ вместо r и заменяя в формуле (13) a на $a+h$, мы получим

$$Y^{(k)}(a+h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k} \frac{h^{\lambda}}{\lambda!} Y^{(k+\lambda)}(a) + h^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r+k} \alpha_{\lambda} \Delta^{\lambda} Y^{(n)}_{-\lambda},$$

$$Y^{*(k)}(a+h) = Y^{(k)}(a) - \sum_{\lambda=1}^{n-k} \frac{(-h)^{\lambda}}{\lambda!} Y^{(k+\lambda)}(a+h) - (-h)^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{r+k} \beta_{\lambda} \Delta^{\lambda} Y^{(n)}_{-\lambda+1}.$$

Разность остаточных членов этих формул приближенно равна $Y^{(k)}(a+h)-Y^{*(k)}(a+h)$, а отношение тех же членов равно отношению определенных интегралов

$$\int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(-r-k-1)} dt$$

и

$$(-1)^{n+r+1}\int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(r+k+1)} dt.$$

Следовательно, ошибка, возникающая вследствие применения формулы (13), приближенно равна

$$\frac{Y^{*(k)}(a+h)-Y^{(k)}(a+h)}{1-\mu},$$

где

$$\mu=\frac{\int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(-r-k-1)} dt}{(-1)^{n+r+1}\int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(r+k+1)} dt}.$$

Если эта ошибка мала в пределах точности вычисления, то вычисление может быть продолжено, в противном случае следует уменьшить h.

На практике, при инженерных расчетах, пользуются формулами, в которых учитываются обыкновенно разности не выше третьего или четвертого порядка.

Если для вычисления значения интеграла дифференциального уравнения первого порядка мы воспользуемся формулой Адамса, а для контрольного вычисления формулой Лапласа, сохранив в этих формулах разности третьего порядка, то погрешность второго результата составит около $\frac{19}{270}$ разности между двумя результатами, а при удержании в тех же формулах и разностей четвертого порядка $\frac{27}{502}$ разности между двумя результатами. Если же интересующее нас значение интеграла дифференциального уравнения первого порядка вычислить сначала по формуле (14), а затем по формуле Лапласа, сохранив в этих формулах разности третьего порядка, то погрешность второго вычисления составит около $\frac{19}{251}$ разности между двумя результатами, а при сохранении в тех же формулах и разностей четвертого порядка $\frac{27}{475}$ разности между двумя результатами.

Предположим теперь, что ищется интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x, y, y'),$$

определяемый начальными условиями: при $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$. Для того чтобы вычислить значения функции $y'(x)$, мы применяем формулы Адамса и Лапласа, взяв в этих формулах $y'(x)$ вместо $y(x)$. Об ошибке, возникающей вследствие применения формулы Лапласа, говорилось

выше. Для вычисления значений функции $y(x)$ мы применим формулы (16) и (13), сохранив в этих формулах разности второго порядка. Легко удостовериться, что ошибка, возникающая вследствие применения формулы (13), приближенно равна $\frac{4}{11}$ разности решений по формулам (16) и (13). Если же в формулах (16) и (13) удержать и разности третьего порядка, мы получим значения $y(x)$ с ошибкой, возникающей вследствие применения формулы (13), приближенно равной $\frac{7}{31}$ разности решений по формулам (13) и (16).

Математический институт
Грузинского филиала Академии Наук СССР.

Поступило
13. V. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Изд. Ак. Н. СССР, 1935.

[2] Falkner V. M., A method of numerical solution of differential equations, Phil. Mag., vol. 21, № 141, 1935.

[3] Флоринский Ф. В., О методе Коуэлла, Прикладная математика и механика, т. II, вып. 1, Л.—М., 1934.

[4] Баев К. Л., О методе Коуэлла, Изв. Русск. астр. об-ва, № 1, 1912.

[5] Ветчинкин В. П., Методы приближенного и численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. Военно-Возд. Акад., 1935.

SCH. MIKELADZE. ÜBER DIE INTEGRATION VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT HILFE DER DIFFERENZENMETHODE

ZUSAMMENFASSUNG

Die Existenz eines Integrals der Differentialgleichung (1) (die Formelnummern beziehen sich auf den russischen Text), mit den Anfangsbedingungen

$$y = y_0, \; y' = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

für $x = x_0$, sei bereits festgestellt.

In den äquidistanten Punkten

$$x_0, \; x_0 + h, \; x_0 + 2h, \; \ldots, \; a - h, \; a$$

des Intervalls (x_0, X) mögen die Werte des gesuchten Integrals und seiner Ableitungen bis zur n-ten Ordnung bekannt sein. Die weiteren Werte des Integrals und seiner Ableitungen bis zur n-ten Ordnung in den Punkten $a+h, a+2h, \ldots$ können mit Hilfe einer der Formeln (7), (10), (14), (19), sowie der Differentialgleichung (1) gefunden werden.

Aus den allgemeinen Formeln (9) und (10) findet man leicht die von Adams, Störmer, Laplace und Falkner ([2]) gegebenen Ausdrücke für die Koeffizienten, sowie Ausdrücke für die Restglieder. Aus der allgemeinen Formel (14) erhält man auch neue, für praktische Berechnungen überaus geeignete Formeln.

Aus der allgemeinen Formel (19) bekommt man in Spezialfällen Formeln für die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ([3]), die Cowellsche Formel ([4]), sowie Formeln für die Integration von Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung ([5]).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Б. В. ГНЕДЕНКО

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Исправления к статье под тем же заглавием)

В моей статье, опубликованной в № 2 математической серии «Известий Академии Наук СССР» за 1939 г. (стр. 181—232) в приложениях основной теоремы 7 к исследованию условий сходимости законов распределения сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

к закону Гаусса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

была допущена неточность. Именно, без доказательства приведена лемма 5, оказавшаяся ошибочной. Эта лемма была доказана А. Я. Хинчиным для классической схемы последовательности $\{x_k\}$ независимых случайных величин, при $a = \infty$. Я распространил ее без необходимых изменений на общий случай последовательности серий и произвольного $a \geqslant 0$. Следующий пример показывает, что в данной мной формулировке лемма не верна.

Последовательность серий определяется следующим условием: при n нечетных

$$x_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{n}} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

при n четных

$$x_{nk} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{n}} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Если через $F_{nk}(x)$ обозначить функцию распределения величины x_{nk}, то легко подсчитать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$1^\circ \qquad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} dF_{nk}(x) = 0,$$

$$2^\circ \qquad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) = 1.$$

Но

$$1. \qquad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} dF^{*}_{nk}(x) = 0,$$

$$2. \qquad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < 1} x^2 \, dF^{*}_{nk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для нечетных } n \\ 2 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Последнее соотношение доказывает наше утверждение. Лемма может быть исправлена, если соотношение

$$2 \qquad \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} a^2$$

заменить на

$$2 \qquad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \Bigl(\int\limits_{|x| < \varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \Bigr)^2 \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} a^2.$$

Однако впоследствии эта лемма нам не потребуется.

Разобранная ошибка повлекла за собою неправильные формулировки теорем 12 и 17_1. Мы просим читателя заменить теорему 12 следующей:

ТЕОРЕМА 12'. *Для того чтобы при подходящем подборе постоянных A_n законы распределения сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} - A_n \tag{A}$$

независимых в каждой серии пренебрегаемых в пределе случайных величин сходились к закону Гаусса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия при любом $\varepsilon > 0$:

$$1^\circ \qquad \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} dF_{nk}(x + \alpha_{nk}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

2°
$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x+\alpha_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

где

$$\alpha_{nk} = \int_{|x|<1} x\, dF_{nk}(x).$$

Доказательство. На основании теоремы 8' для сходимости законов распределения сумм (А) к закону Гаусса необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ имели место соотношения

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{B}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \tag{C}$$

Простой расчет показывает, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x+\alpha_{nk}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{\varepsilon<|x|<1} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 + o(1).$$

Но в силу (B)

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{\varepsilon<|x|<1} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} \int_{\varepsilon<|x|<1} x\, dF_{nk}(x) \cdot \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon<|x|<1} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Этим доказана эквивалентность второго условия теоремы и (C). Эквивалентность первого условия теоремы и (B) очевидна из соотношения

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\alpha_{nk}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для теоремы Феллера в формулировке А. Я. Хинчина теперь требуется небольшое доказательство; оно базируется на использовании теоремы Феллера в первоначальной форме (стр. 213). Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что если закон распределения $F_k(x)$ имеет медиану при $x=0$, то

$$\left(\int_{|x|<\varepsilon B_n} x\, dF_k(x) \right)^2 \leqslant \frac{1}{2} \int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x). \tag{D}$$

Дальнейшее очевидно, так как из (D) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x)-\Big(\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x\,dF_k(x)\Big)^2\right\}<$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x).$$

Для доказательства (D) обозначим через I ту из областей $(-\varepsilon B_n<x<0)$, $(0<x<\varepsilon B_n)$, для которой $\left|\int x\,dF_k(x)\right|$ максимальна. Очевидно, что

$$\Big(\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x\,dF_k(x)\Big)^2\leqslant\Big(\int\limits_{I} x\,dF_k(x)\Big)^2\leqslant\int\limits_{I} dF_k(x)\cdot\int\limits_{I} x^2\,dF_k(x)<$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x).$$

Предпоследнее неравенство получено на основании неравенства Шварца, а последнее в силу выбора медианы.

Теорема 17_1 должна быть заменена следующей:

ТЕОРЕМА $17_1'$. *Для того чтобы при надлежащем подборе постоянных A_n законы распределения сумм*

$$s_n=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}-A_n$$

независимых в каждой серии пренебрегаемых в пределе случайных величин сходились к закону Гаусса, необходимо и достаточно, чтобы суммы

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{k_n}\Big(x_{nk}-\int\limits_{|x|<1} x\,dF_{nk}(x)\Big)^2$$

были относительно устойчивы.

В параллель теореме $17_1'$ мы приведем теорему $17_2'$, являющуюся легким видоизменением теоремы 17_2.

ТЕОРЕМА $17_2'$. *Для того чтобы законы распределения сумм*

$$s_n=\sum_{k=1}^{k_n}(x_{nk}-Ex_{nk})$$

независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{k=1}^{k_n}Dx_{nk}=1,\quad \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} Dx_{nk}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

($Dx = Ex^2 - (Ex)^2$), *сходились к закону Гаусса, необходимо и достаточно, чтобы суммы*

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{k_n} (x_{nk} - Ex_{nk})^2$$

были относительно устойчивы.

Доказательства теорем $17'_1$ и $17'_2$ проводятся так же, как и теорем 17_1 и 17_2 текста основной работы, путем сравнения условий сходимости законов распределения соответствующих сумм к закону Гаусса и закону $\varepsilon(x-1)$.

Математический институт
Московского гос. университета.

Поступило
13. VII. 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая — Série mathématique

СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СЕРИИ ЗА 1939 г.

TABLES DES MATIÈRES DE LA SÉRIE MATHÉMATIQUE, 1939

№ 1

	Стр.		Page
XVIII съезд Всесоюзной Коммунистической партии (большевиков)			3
И. И. Привалов. Некоторые замечания к теории субгармонических функций	7	I. Privaloff. Quelques remarques dans la théorie des fonctions subharmoniques	12
И. И. Привалов. К проблеме Ватсона	13	I. Privaloff. Sur le problème de Watson	22
В. С. Федоров. Особые значения аналитической функции, непрерывной на всюду разрывном совершенном множестве ее особых точек	23	W. Fedoroff. Sur les valeurs singulières d'une fonction analytique et continue sur l'ensemble partout discontinu de ses points singuliers	33
П. С. Новиков. О множествах эффективно-несчетных	35	P. Novikoff. Sur les ensembles effectivement non dénombrables	39
А. А. Ляпунов. Некоторые случаи униформизации плоских CA- и A_2'-множеств	41	A. Liapounoff. Sur l'uniformisation de quelques ensembles CA et A_2'	51
М. А. Наймарк. О прямом произведении замкнутых операторов	53	M. Neumark. On the direct product of closed operators	74
Ю. В. Линник. Одна общая теорема о представлении чисел отдельными тернарными квадратичными формами	87	G. Linnik. A general theorem on representation of numbers by some ternary quadratic forms	108

№ 2

	Стр.		Page
И. М. Виноградов. Элементарные оценки одной тригонометрической суммы с простыми числами	111	I. Vinogradow. Elementary estimations of a certain trigonometrical sum with primes	121
П. Е. Дюбюк. О нормализаторе элемента в конечной группе	123	P. Dubuque. Sur le normalisateur d'un élément dans un groupe fini	136
Е. С. Ляпин. О разложении абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга	141	E. Liapin. On the decomposition of abelian groups into direct sums of groups of the first rank	147
П. В. Соловьев. Некоторые замечания о периодических решениях нелинейных уравнений гиперболического типа	149	P. Solovieff. Quelques remarques sur les solutions des équations non linéaires du type hyperbolique	163
М. А. Наймарк. О структуре области определения самосопряженного оператора	165	M. Neumark. On the domain of a self-adjoint operator	176

Б. В. Гнеденко. К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин 181

B. Gnedenko. To the theory of limiting theorems for sums of independent random variables 227

В. Я. Арсенин. О проекциях B-множеств 233

V. Arsenin. Sur les projections des ensembles mesurables B . . 239

№ 3

А. Д. Александров. Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования 243

A. Alexandrov. An application of the theorem on the invariance of domains to existence proofs 256

Л. А. Люстерник. Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве 257

L. Lusternik. Sur une classe d'opérateurs non linéaires dans l'espace de Hilbert 263

М. А. Наймарк. Дефектные подпространства прямого произведения симметрических операторов. I 265

M. Neumark. The deficiencispaces of the direct product of symmetric operators. I . . 274

Я. Л. Геронимус. Об одной задаче F. Riesz'a и обобщенной задаче Чебышева-Коркина-Золотарева 279

J. Geronimus. Sur un problème de F. Riesz et le problème généralisé de Tchebycheff-Korkine-Zolotareff 287

В. А. Кречмар. О верхнем пределе числа представлений целого числа некоторыми бинарными формами четвертой степени 289

V. Krechmar. On the superior bound of the number of representations of an integer by binary forms of the fourth degree 302

Б. И. Сегал. Представление комплексных чисел суммами степеней многочлена 303

B. Segal. Representation of complex numbers by sums of powers of polynomials 318

Н. В. Смирнов. Об одной предельной теореме в схеме независимых испытаний 319

N. Smirnoff. Sur un théorème limite dans un schème d'épreuves indépendantes 328

П. Я. Полубаринова-Кочина. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек) . 329

P. Poloubarinova-Kochina. An application of the theory of linear differential equations to some problems of ground-water motion (the case of three singular points) . . . 350

Н. А. Артемьев. Осуществимые движения 351

N. Artemiev. Über realisierbare Bewegungen 366

№ 4

И. М. Виноградов. Оценки некоторых простейших тригонометрических сумм с простыми числами 371

I. Vinogradow. On the estimations of some simplest trigonometrical sums involving prime numbers 396

А. К. Митропольский. О множественных нелинейных корреляционных уравнениях 399

A. Mitropolsky. On the multiple non-linear correlation equations 405

А. А. Ляпунов. Об одном свойстве δs-операций 407

A. Liapounoff. Sur une propriété des δs-opérations 411

Н. С. Смирнов. Применение рядов Фурье к решению интегральных и интегродифференциальных уравнений 413

N. Smirnoff. Sur l'application des séries de Fourier à la résolution des équations intégrales et intégrodifferentielles . . 427

Н. А. Артемьев. Осуществимые траектории 429

N. Artemieff. Über realisierbare Trajektorien 446

П. М. Риз. Деформации и напряжения естественно закрученных стержней 449

P. Riz. On the deformations and stresses of naturally twisted bars 476

В. К. Иванов. О сходимости процессов итерации при решении систем линейных алгебраических уравнений 477

V. Ivanov. On the convergence of the process of iteration in the solution of a system of linear algebraic equations . . 483

№ 5—6

А. Я. Хинчин. О локальном росте однородных стохастических процессов без последействия 487

А. О. Гельфонд. О приближении алгебраическими числами отношения логарифмов двух алгебраических чисел 509

Б. И. Сегал. О целых числах с каноническим разложением определенного вида 519

А. А. Ляпунов. О кратной отделимости для (A)-операции . 539

И. И. Ибрагимов. О полноте некоторых систем аналитических функций 553

А. С. Кронрод. О структуре множества точек разрыва функции, дифференцируемой в точках непрерывности 569

П. Я. Полубаринова-Кочина. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех) 579

А. Е. Донов. Плоское крыло с острыми кромками в сверхзвуковом потоке 603

Ш. Е. Микеладзе. Об интегрировании дифференциальных уравнений разностным методом 627

Б. В. Гнеденко. К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин (Исправления к статье под тем же заглавием) . . . 643

A. Khintchine. Sur la croissance locale des processus stochastiques homogènes à accroissements indépendants. 507

A. Gelfond. Sur l'approximation du rapport des logarithmes de deux nombres algébriques au moyen de nombres algébriques 518

B. Segal. On integers of standard form of a definite type. 537

A. Liapounoff. Séparabilité multiple pour le cas de l'opération (A). 551

I. Ibraguimoff. Sur quelques systèmes complets de fonctions analytiques. 567

A. Kronrod. Sur la structure de l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction dérivable en ses points de continuité 578

P. Poloubarinova-Kochina. An application of the theory of linear differential equations to some problems of ground-water motion (number of singular points greater than three). 601

A. Donov. A plane wing with sharp edges in a super-sonic stream. 626

Sch. Mikeladze. Über die Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe der Differenzenmethode 642

B. Gnedenko. To the theory of limiting theorems for sums of independent random variables 643

Редактор В. А. Толстиков. Техн. редактор Е. Шнобель.

Сдано в набор 25/IX 1939 г. Подписано к печати 13/XII 1939 г.
Формат бумаги 72×110 см. $10^1/_2$ печ. л. 45 000 тип. зн. в печ. л. Тираж 2 650 экз.
Уполномоченный Главлита А-21576. АНИ № 1839. Заказ 1897.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9.